Tentamen
MVE470/MVE351, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2019-06-12 , 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Mattias Lennartsson , telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen), inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2019.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (10p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$

(a) Bestäm Taylorpoynomet av ordning 2 till $f(x,y)$ kring den stationära punkten $(1,1)$ och avgör om $f(x,y)$ har ett lokalt max, min eller sadelpunkt i $(1,1)$ (3p)

(b) Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y)$ på området $D : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$. (4p)

3. Bestäm värdet på integralen $\iiint_R z\,dV$, där R är området som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ (4p)

4. (a) Redogör för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer. (2p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ och $\mathcal{C}$ är den del av skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $z = y$ där $y \geq 0$, orienterad från punkten $(-1,0,0)$ till $(1,0,0)$. (3p)

5. (a) Definiera begreppet ytintegral av en funktion över en yta. (2p)

(b) Beräkna $\iint_S y^2 z\,dS$, där S är ytan som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = u^2\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna på denna del motsvarar lärmålen för överbetyg, men eventuella poäng från denna del får räknas in i totalpoängen på tentan, oavsett resultat på godkäntdelen.

6. I denna uppgift söker vi lösningar $u(x, y)$ till den partiella differentialekvationen;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

(a) Visa att differentialekvationen (1) övergår i den enklare ekvationen;

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{2}$$

om man gör variabelbytet $\xi = \frac{1}{x} - y, \eta = y$ (3p)

(b) Bestäm formen för alla lösningarna till differentialekvationen (1) genom att först lösa differentialekvationen (2). Bestäm därefter speciellt den lösning som uppfyller; (3p)

$$u(1, y) = y \quad , \text{ för alla } y \in \mathbb{R}$$

7. Låt $\mathbf{F} = (z + y^2)\mathbf{i} + (x + z^2)\mathbf{j} + (y + x^2)\mathbf{k}$. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ upp genom ytan $z^2 = x^2 + y^2 \ , \ -2 \leq z \leq 0$.

(a) dels med hjälp av Gauss's sats. (3p)

(b) dels med hjälp av Stokes's sats. (3p)

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler. (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Anonym kod	**MVE470/MVE351, Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki**	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beskriv och skissa på det geometriska objekt som utgör lösningsmängden till ekvationssystemet; (2p)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Skiss:

Beskrivning: ....

(b) I vilka riktningar utifrån punkten $(2, 0)$ har funktionen $f(x, y) = xy$ riktningsderivatan -1, dvs. för vilka enhetsvektorer $\mathbf{v}$ är $D_{\mathbf{v}}f(2, 0) = -1$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_R \frac{x}{y} e^y \, dA$, då R är området som beskrivs av olikheterna $0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x^2 \, ds$, där $\mathcal{C}$ är den raka sträckan från origo till punkten $(3, 1, -2)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för MVE470/MVE351, läsåret 17/18

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.