Sammanfattning av läsvecka 1 - Flervariabelanalys

Oscar Liljenzin
Christoffer Eliasson
Victor Henkow
Filip Besker
Rikard Carlsson
Simon Johansson Hamberg

Innehåll

1 Första och andragrads ytor i rummet **2**
- 1.1 Första grad . . . 2
- 1.2 Andragradskurvor . . . 2
- 1.3 Andragradsytor . . . 2

2 Reellvärd Funktion **2**

3 Partiella derivator **2**

4 Definition av differentierbarhet i en variabel **3**

5 Definition av differentierbarhet i två variabler **3**
- 5.1 Sats 2.2.2 . . . 3

6 Generalisering till godtyckligt antal variabler **3**

7 Geometrisk tolkning av differentierbarhet **4**

8 Klassen C^1 **4**
- 8.1 Sats 2.2.3 . . . 4

9 Differentierbarhet medför kontinuitet (Sats: 2.2.1) **4**

10 Definition av gradient **5**

11 Definition av riktningsderivata **5**
- 11.1 Sats: 2.4.6 . . . 5
  - 11.1.1 Konsekvenser . . . 5

12 Sats 2.4.8 **6**

13 Kedjeregeln **6**
- 13.1 Steg 1 . . . 6
- 13.2 Steg 2 (sats 2.3.4) . . . 6
- 13.3 Steg 3 . . . 7

14 Högre ordnings partiella derivator **7**
- 14.1 Sats 2.5.9 . . . 7

1 Första och andragrads ytor i rummet

1.1 Första grad

En förstagrads ekvation av två variabler ges av $ax + by = c$, vilket är en linje i planet. En förstagrads ekvation av tre variabler ges av $ax + by + cz = d \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, vilket är ett plan i rummet.

1.2 Andragradskurvor

Nivåkurvorna till andragradspolynom i x och y kallas andragradskurvor. Här följer några exempel.

1. Cirkel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
2. Ellips: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
3. Parabel: $y = x^2$, $x = y^2$
4. Hyperbel: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

1.3 Andragradsytor

Här följer några exempel på andragradsytor.

1. Sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
   Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. Cylinder: $x^2 + y^2 = r^2$ (z är en fri variabel)
3. Kon: $z^2 = c^2(x^2 + y^2)$
4. Paraboloid: $z = c^2(x^2 + y^2)$

2 Reellvärd Funktion

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$, där $n \in \mathbb{N}$. En funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ kallas för en reellvärd funktion av n reella variabler.
Notation: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$.

3 Partiella derivator

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to R$ och låt $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$.
$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{a})}{h}$, där $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^n$.

4 Definition av differentierbarhet i en variabel

Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}$ och $a \in D$. Funktionen f sägs vara **differentierbar** i punkten a om

(i) a är en inre punkt i f:s definitionsmängd, där det finns en omgivning N av noll sådan att $a + h \in D, \forall h \in N$.

(ii) $\exists A \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho : N \to \mathbb{R}$ sådana att

$$\forall h \in N : f(a + h) - f(a) = Ah + h\rho(h)$$

och $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$.

5 Definition av differentierbarhet i två variabler

Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och $(a, b) \in D$. Funktionen f sägs vara differentierbar i (a, b) om

(i) det finns en omgivning N av $(0, 0)$ sådana att

$$(a + h, b + k) \in D, \forall (h, k) \in N.$$

(ii) det finns konstanter $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho : N \to \mathbb{R}$ sådan att $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$, $\forall (h, k) \in N$:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k).$$

5.1 Sats 2.2.2

Låt A_1, A_2 och f vara som ovan, då gäller

$$A_1 = f_x(a, b)$$
$$A_2 = f_y(a, b).$$

6 Generalisering till godtyckligt antal variabler

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $(a_1, \ldots, a_n) \in D$. En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sägs vara differentierbar i punkten $(a_1, \ldots, a_n)$ om det finns konstanter $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ och det finns en funktion $\rho(h_1, \ldots, h_n)$ s.a.

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)-f(a_1, \ldots, a_n) = A_1h_1+\ldots+A_nh_n+\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}\rho(h_1, \ldots, h_n),$$

där $\rho(h_1, \ldots, h_n) \to 0$ då $(h_1, \ldots, h_n) \to (0, \ldots, 0)$.

Följande satser kan även generaliseras till $\mathbb{R}^n$

1. Sats: f differentierbar $\to$ f kontinuerlig (se avsnitt 9 nedan.)
2. Sats: $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$.
3. Sats: $f \in C^1(D) \to f$ differentierbar (se avsnitt 8.1 nedan.)

7 Geometrisk tolkning av differentierbarhet

För en funktion av två variabler är:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k) \qquad (1)$$

Rent allmänt: $z=f(x,y)$ definerar någon yta i $\mathbb{R}^3$. Baspunkt (a,b): gå till grafen $z=f(a,b)$ vilket ger en baspunkt på grafen

$$(a,b,f(a,b)):=(x_0,y_0,z_0).$$

Närliggande punkt $(a+h,b+k)$ ger på grafen

$$(a+h,b+k,f(a+h,b+k)):=(x,y,z).$$

Allting insatt i (1) ger

$$z-z_0=f_x(a,b)(x-x_0)+f_y(a,b)(y-y_0)+\text{felterm}.$$

Från detta fås en approximation till f:s graf i baspunkten till

$$z-z_0=f_x(a,b)(x-x_0)+f_y(a,b)(y-y_0).$$

Detta kallas för tangentplanet till f:s graf i punkten $(a,b,f(a,b))$.

8 Klassen C^1

I praktiken är det krångligt att använda definitionen av differentierbarhet för att verifiera att en funktion är en differentierbar funktion. För att underlätta använder vi oss av följande definition:

Definition: Låt f vara definierad i en öppen mängd $D\subseteq\mathbb{R}^n$. Vi säger att f är av **klass** C^1, eller att f tillhör $C^1(D)$, om f är partiellt deriverbar och om alla de partiella derivatorna $f_{x_1},\ldots,f_{x_n}$ är kontinuerliga i D.

För att använda definitionen av klassen C^1 presenterar vi nu denna sats:

8.1 Sats 2.2.3

Låt $D\subseteq\mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Om $f\in C^1(D)$ så är f differentierbar i hela D.

9 Differentierbarhet medför kontinuitet (Sats: 2.2.1)

Om $f:D\to\mathbb{R}, D\subseteq\mathbb{R}^n$ är differentierbar i en inre punkt $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in D$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$. Enligt definitionen av att en funktion är differentierbar i $\boldsymbol{a}$. $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})\to 0$, då $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$. Vilket precis betyder att f är kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$.

10 Definition av gradient

Definition: Gradienten till f i punkten $\boldsymbol{a}$ är vektorn av dess partiella derivator i $\boldsymbol{a}$ d.v.s.

$$\text{grad}(f)(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right).$$

Så f är differentierbar i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ om

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + \|\boldsymbol{h}\| \rho(\boldsymbol{h}).$$

Där $\rho(\boldsymbol{h}) \to 0$ då $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

11 Definition av riktningsderivata

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, $\boldsymbol{a} \in D$ och $\hat{\boldsymbol{u}}$ vara en enhetsvektor. Riktningsderivatan till f i punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ och i riktning $\hat{\boldsymbol{u}}$ ges av

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\boldsymbol{a}) = f_u(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\hat{\boldsymbol{u}}) - f(\boldsymbol{a})}{h}.$$

11.1 Sats: 2.4.6

Om f är differentierbar i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ så är $f_u(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$.

11.1.1 Konsekvenser

Enligt skalär produktens definition är

$$\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \|\boldsymbol{v_1}\| \|\boldsymbol{v_2}\| \cos\theta$$

$$\begin{aligned} f_u(\boldsymbol{a}) &= \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \\ &= \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \|\hat{\boldsymbol{u}}\| \cos(\text{vinkeln mellan riktningen och gradienten}) \\ &= \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cos(\text{vinkeln mellan riktningen och gradienten}), \end{aligned}$$

eftersom $\hat{\boldsymbol{u}}$ är en enhetsvektor och därmed per definition så $\|\hat{\boldsymbol{u}}\| = 1$.

- Slutsats 1. Funktionens lutning är störst i gradienten riktning.
- Slutsats 2. Funktionens lutning är minst (dvs. störst negativ) i motsatt riktning till gradienten.
- Slutsats 3. f behåller ett konstant värde om du går ortogonalt mot gradienten. (Sats 8)

12 Sats 2.4.8

Låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler och låt $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vara en punkt på nivå(hyper)ytan $f(x_1 \ldots, x_n) = c$,
dvs $f(a_1, \ldots, a_n) = c$.

Om $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$, då gäller att $\nabla f(\boldsymbol{a})$ är en normalvektor till tangent(hyper)planet till nivåhyperytan i punkten $\boldsymbol{a}$.

13 Kedjeregeln

Kedjeregeln för derivering av sammansatta funktioner.

Vi bygger upp kedjeregeln i fyra steg varav de tre första kommer att tas upp här.

13.1 Steg 1

Kedjeregeln i envariabelsanalysen säger att om f, g är differentierbara funktioner av en variabel, då är sammansättningen $f \circ g$ också differentierbar och

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Det följer direkt att om f är en differentierbar funktion av en variabel och $g(x_1, \ldots, x_n)$ är en differentierbar funktion av ett godtyckligt antal variabler gäller att sammansättningen $f \circ g$ är en differentierbar funktion av n variabler och

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g) = f'(g(x_1, \ldots, x_n)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Detta är en direkt konsekvens av definitionen av partiell derivata och kedjeregeln från envariabelsanalysen.

13.2 Steg 2 (sats 2.3.4)

Låt f vara ett differentierbar funktion av n st variabler och låt $g_1, \ldots, g_n$ vara n st differentierbara funktioner av en variabel (t). Då gäller att sammansättningen $f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ är en differentierbar funktion av t och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}$$

eller med vektornotation $\boldsymbol{g} = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ då

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{g}(t)) = \nabla f(\boldsymbol{g}(t)) \cdot \boldsymbol{g}'(t).$$

13.3 Steg 3

Låt f vara en differntierbar funktion av m st variabler och låt $g_1, \ldots, g_m$ vara m st differentierbara funktioner av n st variabler. Då gäller att sammansättningen $f(g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_m(t_1, \ldots, t_n))$ är en differentierbar funktion av $t_1, \ldots, t_n$ och

$$\frac{\partial}{\partial t_i} f(g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_m(t_1, \ldots, t_n)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} (g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_m(t_1, \ldots, t_n) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t_i}$$

14 Högre ordnings partiella derivator

Notation: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $k \in \mathbb{Z}$ s.a. $k \geq 1$. Då är $C^k(D) = \{f : D \to \mathbb{R} | \text{Alla } f\text{:s partiella derivator av ordning upp till } k \text{ är kontinuerliga funktioner i } D\}$.

14.1 Sats 2.5.9

Om $f \in C^k(D) \to$ ordningen spelar ingen roll i en partiell derivata av ordning upp till k.