Sammanfattning LV1 Flervariabelanalys

Anton Brunström, Carl Strandby, Erman Kulaglic, Lovisa Åkesson, Tuss Anzelius

Januari 2020

1 Partiell deriverbarhet

Definition: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där D$\subseteq \mathbb{R}^2 och$(a,b) $\in D$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \tag{1}$$

existerar så sägs funktionen f vara partiellt deriverbar.

Mer allmän defintion: Låt $\boldsymbol{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D till funktionen f av n variabler. Då kan den partiella derivatan med avseende på variabeln x_j i punkten $\boldsymbol{a}$ betecknas: $\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-f(\boldsymbol{a})}{h}$. Där $\{e_1,...,e_n\}$ är standardbas för R^n.

Med avseende på x kan man beteckna den partiella derivatan $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ eller $f_x(a,b)$. För att räkna ut den partiella derivatan av en funktion behandlar man alla variabler som konstanter förutom den variabel med deriverar med avseende på, som deriverar på vanligt vis.

Exempel 1:
$f(x,y) = xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$.

Exempel 2:
Observera följande ickekontinuerliga funktion,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{när}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{när}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Observera gränsvärdet av funktionen när $(x,y) \to (0,0)$, genom att göra varaibelbyte till polära koordinater. Man får då att $x = rcos(\theta)$ och $y = rsin(\theta)$, där $r \to 0$. Gränsvärdet kan därmed skrivas som

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 cos(\theta)sin(\theta)}{r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))}. \tag{2}$$

Använd vidare att $cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$ och att formeln för dubbla vinkeln för sinus kan skrivas som $sin(2\theta) = 2sin(\theta)cos(\theta)$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{cos(\theta)sin(\theta)}{1}, \tag{3}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{sin(2\theta)}{2}. \tag{4}$$

När $r \to 0$ är funktionen ej kontinuerlig ty $\theta \in [0, 2\pi]$. Denna funktion är partiellt deriverbar i varje punkt, vilket visar att det finns partiellt deriverbara funktioner som inte är kontinuerliga. Detta exempel tyder på att partiell deriverbarhet inte är en helt lämplig flerdimensionell motsvarighet till deriverbarhet för funktioner med en variabel. Detta leder oss till differentierbarhet.

2 Differentierbarhet

Definition i två variabler:
Låt $f : D \to$ R där D$\subseteq \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in D$. Då är f differentierbar i (a,b) om

1. $\exists$ en omgivning N av (0,0) s.a. $(a + h, b + k) \in D \ \forall (h, k) \in \mathbb{N}$.
2. $\exists$ konstant $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s.a. $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0) \ \forall h, k, \in \mathbb{N}$

Ekvationen för differentierbarhet kallas för linjäriseringsformeln och kan skrivas

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = A_1h + A_2k + \rho(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \tag{5}$$

Man kan säga att differentierbarhet är ett generelliserat begrepp av deriverbarhet för flera variabler. Enligt ekvationen för differentierbarhet och sats 2.2.3, kan man notera att partiell deriverbarhet används vid differentierbarhet, med skillnad att det vid differentierbarhet finns en restterm $\rho(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ som måste gå mot noll då $(h, k) \to (0, 0)$. Det är denna del av ekvationen som visar på skillnaden att en differentierbar funktion måste vara kontinuerlig, medan det finns icke-kontinuerliga funktioner som är partiellt deriverbara. Man kan därav notera att differentierbarhet är en lämplig motsvarighet till deriverbarhet i flera variabler och att partiell deriverbarhet används som ett hjälpmedel till detta.

3 Satser om differentierbarhet

I följande avsnitt presenteras tre satser om differentierbarhet.

3.1 Sats 2.2.1

Om $f : D \to \mathbb{R}$ där D $\subseteq \mathbb{R}^2$ är differentierbar i punkten (a, b) så är f kontinuerlig i (a, b).

3.2 Sats 2.2.2

I linjäriseringsformeln, ekvation 5, gäller att $A_1 = f_x(a, b)$ och $A_2 = f_y(a, b)$

3.3 Sats 2.2.3

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen mängd. Om $fC'(D)$ så är f differentierbar i hela D.

4 Avgöra om en funktion f är differentierbar

För att avgöra om en funktion f är differentierbar behövs det:

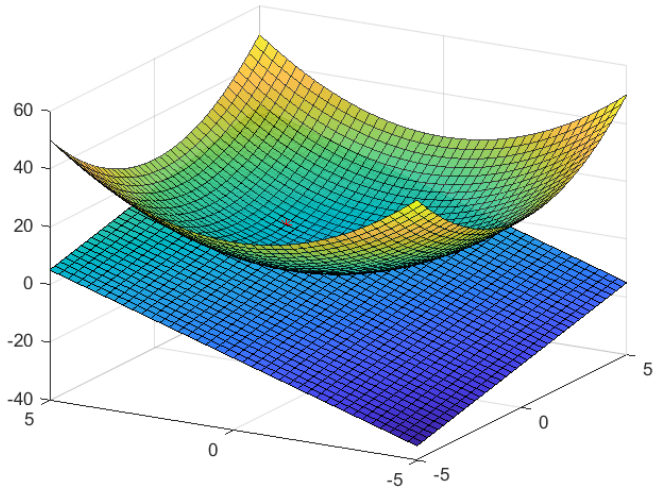
1. Verifieras att f_x och f_y existerar och är kontinuerliga i definitionsmängden.
2. Göras en ansättning, exempelvis när n=2:

$$\rho(h,k) = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h \cdot f_x(a,b) - k \cdot f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{6}$$

3. och till sist verifieras att $\lim_{(h,k)\to\ (0,0)} \rho(h,k) = 0$

5 Geometrisk tolkning av differentierbarhet i två variabler

Allmänt gäller att en funktion av två variabler $Z = f(x,y)$ definierar någon yta i $\mathbb{R}^3$. Ifall funktionen $f(x,y)$ är differentierbar i en baspunkt (a,b) i xy-planet, innebär detta geometriskt att det finns ett tangentplan i punkten $(a,b,f(a,b))$ sådan att lutningen på tangentplanet är densamma som lutningen på ytan, se figur 1.



Figur 1: Paraboloid med tangentplan

6 Tangentplanets ekvation

I planet är ytor av första graden linjer och skrivs enligt formeln $ax + by = c$. I rummet kallas de istället för plan och skrivs enligt formeln $ax + by + cz = d \iff a(x - x_o) + b(y - y_0) + c(z - z_o) = d$. Ytor av andra grad kan istället definieras som mängden lösningar till ett kvadratiskt polynom. Typiska exempel på andragradsytor är sfärer, cylindrar, koner, paraboloider och hyperboloider.

Andragradsytor kan approximeras i en baspunkt (a, b) genom att bestämma ett tangentplan till ytan $Z = f(x, y)$. Baspunkten på grafen i $\mathbb{R}^3$ kan då betecknas: $(a, b, f(a, b)) = (x_0, y_0, z_0)$. Tag sedan en närliggande punkt på ytan $(a+h, b+k)$ vilken då kan betecknas $(a+h, b+k, f(a+h, b+k)) = (x, y, z)$. Insättning i linjäriseringsformeln ger en approximation till f:s graf i baspunkten (a, b):

$$z - z_0 = f_x(a, b)(x - x_0) + f_y(a, b)(y - y_0) \tag{7}$$

Detta kallas tangentplanet till f:s graf i punkten $(a, b, f(a, b))$.

7 Linjärisering av differentierbara funktioner i vektorform

Metoden för att linjärisera en differentierbar funktion i två variabler kan generaliseras till att gälla för ett godtyckligt antal variabler. Enligt sats 2.2.3 så kan en linjärisering i två funktioner göras i två steg enligt:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] + [f(a+h, b) - f(a, b)] =$$
$$= kf_y(a+h, b) + k\rho_1(h, k) + hf_x(a, b) + h\rho_2(h, k)$$

Detta kan geometriskt tolkas som att dela upp vektorn från (a,b) till (a+h,b+k) i två steg. Ett steg längs x-axeln och ett steg längs y-axeln. Slutligen introducerar vi en felterm $\rho_3(h, k)$ som går mot noll då $(h, k) \to (0, 0)$. Detta gör vi så att vi kan skriva om $f_y(a+h, b)$ till $f_y(a, b)$. Kvar får vi uttrycket.

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = kf_y(a, b) + hf_x(a, b) + k\rho_1(h, k) + h\rho_2(h, k) + h\rho_3(h, k) \tag{8}$$

För att visa att feltermen går mot noll skriver vi $\rho(h, k) = \frac{\rho_1(h,k)+h\rho_2(h,k)+h\rho_3(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ och noterar att kvoterna $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ och $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ är båda mindre än ett. Feltermens övre gräns är således $\rho_1(h, k) + \rho_2(h, k) + \rho_3(h, k)$ vilket går mot noll då $(h, k) \to (0, 0)$. Dessa steg är generella och kan upprepas för varje variabel vi lägger till genom att dela upp uttrycket för vektorn längs varje axel för sig och använda linjäriseringsformeln för två variabler. Därför kan vi skriva en generell vektorform av linjäriseringsformeln. Vi benämner $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ och $\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$ och skriver linjäriseringsformeln enligt:

$$f(a_1 + h_1, ..., a_n + h_n) - f(a_1, ..., a_n) = A_1h_1 + ...A_nh_n + \sqrt{h_1^2 + ...h_n^2}\rho(h_1, ..., h_n) \tag{9}$$

Där $\rho(h_1, ..., h_n) \to 0$ då $\vec{h} \to \vec{0}$ och $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n)$. Vektorn av funktionens partiella derivator i $\vec{a}$ kallas för gradient och skrivs:

$$\text{grad}(f)_{(a)} = \nabla f_(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \tag{10}$$

Vektorformen blir då:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}|\rho(\vec{h}) \tag{11}$$

Där $\rho(\vec{h}) \to 0$ då $\vec{h} \to 0$

8 Riktningsderivator

För att underlätta förståelsen för vad en riktningsderivata är kan man tänka på det som en partiell derivata i helt godtycklig riktning, alltså inte nödvändigtvis längs en koordinataxel. Genom att införa enhetsvektorn $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ kan denna riktning från punkten $\vec{a}$ entydigt bestämmas. Nu har vi verktygen för att definera riktningsderivator.

8.1 Defenition av riktningsderivata

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, $\vec{a} \in D$ vara en punkt och $\hat{u}$ en enhetsvektor i godtycklig riktning. Då gäller att riktningsderivatan till $f(\vec{x})$ i punkten $\vec{x} = \vec{a}$ och i riktning $\hat{u}$ ges av ekvationen,

$$\frac{\delta f}{\delta u}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\hat{u}) - f(\vec{a})}{h} = f_u(\vec{a}) \tag{12}$$

Observera att det är viktigt att û är en enhetsvektor och därmed har längden 1 då det är h som ska markera längden medan $\hat{u}$ endast markerar riktning.

8.2 Sats 2.4.6

Då defenitionen för riktningsderivata kan vara omständig att använda vid beräkningar är Sats 2.4.6 mycket användbar.

Om $f(\vec{x})$ är en differentierbar funktion i punkten $\vec{x} = \vec{a}$ gäller,

$$f_u(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{u} \tag{13}$$

Vid närmare betraktelse av (13) kan tre användbara följder härledas. Eftersom skalärprodukten av två vektorer defineras som längden av de två vektorerna multiplicerat med cosinus av vinkeln mellan dem inses i detta fall att riktningsderivatan i punkten $\vec{a}$ och riktning $\hat{u}$ aldrig kan bli större än gradienten av f i punkten $\vec{a}$. Mer exakt är riktningsderivatan i en punkt $\vec{a}$ alltid som störst i gradientens riktning och alltid lika med gradienten. Analogt är riktningsderivatan som minst, eller störst negativ, i motsatt riktning mot gradienten. Avslutningsvis är riktningsderivatan lika med noll då $\hat{u}$ är ortogonalt riktad mot gradienten. Cosinus av vinkeln är då noll och funktionens värde är konstant i denna riktning.

9 Geometrisk tolkning av gradient och nivåytor

Gradientens defenition är sedan tidigare given, och gradienten har använts för att utföra beräkning av exemplevis riktningsderivata. Nu skall dess geometriska betydelse tolkas.

Först analyseras gradienten hos en funktion av två variabler. I punkten (a,b) på nivåkurvan $f(x, y) = C$ gäller att $f(a, b) = C$. Parametrisera nivåkurvan genom att sätta $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Då gäller att $f(x(t), y(t)) = C$. Derivatan med avseende på t är alltså 0. Men derivatan i punkten (a,b) som kan skrivas $(x(t_0), y(t_0))$ är också gradienten av f skalärmultiplicerat med derivatan av $x(t_0)$ och $y(t_0)$. Alltså,

$$\nabla f(a, b) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) = 0. \tag{14}$$

Detta betyder att så länge grad $f(a,b)$ ej är lika med 0 är gradienten i (a,b) ortogonal mot nivåkurvans tangent i (a,b). Det visar sig att detta gäller på motsvarande sätt i fler variabler. Detta formuleras i sats 2.4.8.

9.1 Sats 2.4.8

Låt $f(x_1,...,x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler och låt $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$ vara en punkt på nivå(hyper)ytan $f(x_1,...,x_n) = C$. Då gäller att gradienten $\nabla f(\vec{a})$ är en normalvetktor till tangent(hyper)planet till nivå(hyper)ytan i punkten $\vec{a}$.

9.2 Relationen mellan funktionsytor och nivåytor

$Z = f(x,y)$ är funktionsytan till en funktion av två variabler. Men, en funktionsyta kan också uppfattas som en nivåyta. Genom att sätta $g(x,y,z) = f(x,y) - z$ ges nivåytan till $g(x,y,z) = 0$ av $z = f(x,y)$. Då blir grad $g = (f_x, f_y, -1)$ och tangentplanets ekvation i punkten $(a,b,f(a,b))$ på nivåytan,

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + (-1)(z - f(a,b)) = 0. \tag{15}$$

10 Kedjeregeln

I envariabelsanalys så säger kedjeregeln att om funktionerna f, g är differentierbara, så är sammansättningen $f \circ g$ differentierbar och

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t). \tag{16}$$

En direkt följd av (16) och definitionen av partiell derivata är att om f är en funktion av en variabel samt av klassen $\mathcal{C}^1$ och $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \cdots, x_n)$ så gäller det att $f \circ g$ är en funktion av klassen $\mathcal{C}^1$ och

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g) = f'(g(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}, i = 1, \cdots, n \tag{17}$$

Vi skall nu låta f vara en differentierbar funktion av n st variabler samt $g_1, \cdots, g_n$ vara n st funktioner av en variabel t. Då gäller det att sammansättningen $f(g_1(t), \cdots, g_n(t))$ är en differentierbar funktion och

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), \cdots, g_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \cdots, g_n(t)) \cdot \frac{dg_i}{dt} \tag{18}$$

vilket med vektornotation kan skrivas om till

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t) \tag{19}$$

11 Partiella derivatorer av högre ordning

När derviering partiellt flera gånger görs så kan ordningen av variabel spela roll. Derivering med avseende på x två gånger följt på varandra så används notationen f_{xx} och på liknande sätt för y. I vissa fall så behöver inte ordningen spela någon roll, det finns sådana funktioner där $f_{xy} = f_{yx}$.

11.1 Sats 2.4.9

Om $f \in \mathcal{C}^k(D) \Rightarrow$ Ordningen spelar ingen roll i en partielld derivata av ordning $\leq k$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en öppen mängd och k är ett heltal.