

Rapport MVE600 MVE035

Burman, Jacob
Frilund, Ruben
Jerkvall, Thomas
Karlsson, Oscar
Lemann, Emelie
Svanberg, Hans

13 februari 2020

1 Introduktion

Sammanställning av föreläsningar i flervariabelanalys läsvecka 2. Under veckan började vi med fortsättning av deriverbarhet i flera variabler som följdes av Taylorpolynom och Taylors sats i flera variabler vilket fortsatte i kritiska/stationära punkter och klassificering av dessa. Efter det gick vi in på vektorvärda funktioner och avslutade veckan med variabelbyten.

2 Differentierbarhet

Sats 2.3.4

Om $f(x_1, \dots, x_n)$ är en funktion av n variabler och $g_1(t), \dots, g_n(t)$ är n st funktioner av en variabel och om alla dessa är differentierbara följer att $f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ är en differentierbar funktion av en variabel, t .

Derivatans för denna funktion är då

$$\frac{d}{dt}f(g_1(t), \dots, g_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \dots, g_n(t)) \cdot \frac{dg_i}{dt} \quad (1)$$

Beviset för denna sats görs genom att ansätta $F(t) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ och visa att $F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$ existerar och är lika med

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(a), \dots, g_n(a)) \cdot \frac{dg_i}{dt}(a) \quad (2)$$

Sats 2.5.9

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, vara en öppen mängd, där $f \in C^2(D)$ och $(a,b) \in D$. Då gäller att $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Beviset för denna sats görs m.h.a. medelvärdessatsen från envariabelanalys som säger att om funktionen $\varphi(x)$ är kontinuerlig på ett intervall $[\alpha, \beta]$ och differentierbar på (α, β) , då $\exists \gamma \in (\alpha, \beta)$ s.a $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = (\beta - \alpha) \cdot \varphi'(\gamma)$.

3 Taylorpolynom

Taylors sats för en variabel

Låt $m \geq 0$, $D \subseteq \mathbb{R}$ vara en öppen mängd, $f \in C^{m+1}(D)$ och $a \in D$. Då gäller för varje $x \in D$, att

$$f(x) = \sum_{j=0}^m \frac{f^j(a)}{j!} (x-a)^j + \frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1} \quad (3)$$

för något $\xi = \xi(x) \in (a, x)$.

Vi sätter $h = x - a$, där idén är att ha h så litet som möjligt. Då kan vi skriva ut ovanstående formel på följande sätt

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^m \frac{f^j(a)}{j!} h^j + O(h^{k+1}) \quad (4)$$

där $O(h^{k+1})$ är Taylorutvecklingens felterm.

Det är sällan man skriver ut Taylorutvecklingen av högre grad än 2, dvs.

$$m = 2 : \quad f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + f''(a) \cdot \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (5)$$

Taylors sats för två variabler

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen mängd, $(a,b) \in D$ och $f \in C^{m+1}(D)$. Välj (h,k) så litet så att bollen av radie $\sqrt{h^2 + k^2}$ kring (a,b) ligger inom D . Vi betraktar a, b, h, k som fixt och definierar en funktion $F(t)$ enligt

$$F(t) = f(a+th, b+tk), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (6)$$

Med hjälp av kedjeregeln får vi följande

$$F'(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a+th, b+tk). \quad (7)$$

$$F''(t) = \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(a+th, b+tk), \quad m \geq 2. \quad (8)$$

Sätt $t = 1$. Insättning i Taylors formel ger oss

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^m \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^j}{j!} f(a, b) + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}}{(m+1)!} f(a+\xi h, b+\xi k) \quad \exists \xi \in (0, 1). \quad (9)$$

Taylorutvecklingen av grad 2, som är det viktigaste fallet skriver vi på följande sätt

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + [hf_x(a, b) + kf_y(a, b)] + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)] + O((h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}). \quad (10)$$

Taylorutveckling för ett godtyckligt antal variabler

Sätt $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Taylorutvecklingen kan skrivas som på formeln innan

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^m \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\mathbf{a}) + O(\|\mathbf{h}\|^{m+1}). \quad (11)$$

4 Kritiska/Stationära punkter

Kritiska punkter

En kritisk och stationär punkt är samma sak, vi kommer endast att kalla det för kritisk punkt. En kritisk punkt definieras genom att man låter en funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler. Punkten $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ sägs vara en kritisk punkt till f om

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (12)$$

det vill säga att $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Dessutom definierar vi lokala extrempunkter genom att låta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathbf{a} \in D$. f sägs ha ett lokalt maximum i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om $\exists \delta > 0$ så att

$$\|\mathbf{h}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{a}) \quad (13)$$

och f sägs ha ett lokalt minimum i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om $\exists \delta > 0$ så att

$$\|\mathbf{h}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{a}). \quad (14)$$

Om f är differentierbar så gäller att varje lokal extrempunkt är en kritisk punkt.

Klassificering av kritiska punkter

För att klassificera kritiska punkter behöver vi Taylorutvecklingen av andra ordningen för en funktion så låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in D$, $f \in C^3(D)$. Om (a,b) är en kritisk punkt $\Rightarrow$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)] + O((h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}). \quad (15)$$

Sätt då:

$$A = \frac{1}{2} f_{xx}(a,b), B = \frac{1}{2} f_{xy}(a,b), C = \frac{1}{2} f_{yy}(a,b). \quad (16)$$

Då kan vi definiera binär kvadratisk form. En funktion $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på formen $Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ där $A,B,C \in \mathbb{R}$ kallas för binär kvadratisk form.

5 typer av binär kvadratisk form

1. Positivt definit om $Q(x,y) > 0 \forall (x,y) \neq (0,0)$
2. Negativt definit om $Q(x,y) < 0 \forall (x,y) \neq (0,0)$
3. Indefinit om $\exists (x_1,y_1)$ så att $Q(x_1,y_1) > 0$ och $\exists (x_2,y_2)$ så att $Q(x_2,y_2) < 0$
4. Positivt semidefinit om $Q(x,y) \geq 0 \forall (x,y)$ och $\exists (x_1,y_1) \neq (0,0)$ så att $Q(x_1,y_1) = 0$
5. Negativt semidefinit om $Q(x,y) \leq 0 \forall (x,y)$ och $\exists (x_1,y_1) \neq (0,0)$ så att $Q(x_1,y_1) = 0$

Sats 1

För formen på Q ovan gäller:

1. $AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Rightarrow Q$ positivt definit.
2. $AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Rightarrow Q$ negativt definit.
3. $AC - B^2 < 0 \Rightarrow Q$ indefinit.
4. $AC - B^2 = 0 \Rightarrow Q$ semidefinit.

För att bevisa sats 1 låter vi $A \neq 0$ så kan den binära kvadratiske formen skrivas om till:

$$Q(x,y) = A \left[\left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \left(AC - B^2 \right) \frac{y^2}{A} \right] \quad (17)$$

Om $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ uttrycket alltid positivt p.g.a. kvadraterna. Bevisar (1) och (2).

Om $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ uttrycket kan vara både positivt och negativt. Bevisar (3)

i fallet $A \neq 0$.

Om $AC - B^2 \leq 0$ och om $A = C = 0$ så är $AC - B^2 = -B^2 \Rightarrow$ icke-negativt då $B = 0$. Annars blir $Q(x,y) = 2Bxy \Rightarrow Q$ kan vara både positivt och negativt $\Rightarrow$ (3) bevisad även för fallet $A = 0$.

Sats 2

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen mängd, $f \in C^3(D)$ och $(a,b) \in D$ vara en stationär punkt till f . Då gäller:

1. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2|_{(a,b)} > 0$ och $f_{xx}|_{(a,b)} > 0 \Rightarrow (a,b)$ är lokalt minimum.
2. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2|_{(a,b)} > 0$ och $f_{xx}|_{(a,b)} < 0 \Rightarrow (a,b)$ är lokalt maximum.
3. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2|_{(a,b)} < 0 \Rightarrow (a,b)$ är en sadelpunkt.

För att räkna på $D \subseteq \mathbb{R}^n$ så används matriser med motiveringen:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M) = AC - B^2 \quad (18)$$

5 Vektorvärda funktioner

Definition av vektorvärda funktioner

Låt $m, n \in \mathbb{N}$. En funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kallas för en vektorvärd funktion av n variabler.

$$\mathbf{F} : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Funktionen $\mathbf{F}$ sägs vara differentierbar om varje $\mathbf{F}_i$ är det. Om varje $\mathbf{F}_i$ är differentierbar $\Rightarrow \exists$ för varje i en funktion ρ_i s.a.

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}_i(\mathbf{a}) + \nabla \mathbf{F}_i(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \rho_i(\mathbf{h}) \quad (20)$$

där $\rho_i(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Om man tänker sig att man "staplar" funktionerna $\mathbf{F}_i$ på varandra så får man

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + D\mathbf{F}(\mathbf{a}) * \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \rho(\mathbf{h}) \quad (21)$$

där $\rho = \begin{bmatrix} \rho_1(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ \rho_m(\mathbf{h}) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0}$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$ kallas funktionalmatrisen till $\mathbf{F}$ i

punkten $\mathbf{a}$ och är en $m \times n$ matris där det (i,j) :te elementet är $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$

Kedjeregeln för en sammansättning av vektorvärda funktioner

Låt $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en vektorvärd funktion som tar en vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Då blir sammansättningen

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \circ \mathbf{G} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))\end{aligned}\tag{22}$$

Sats

Om $\mathbf{G}$ och $\mathbf{F}$ är differentierbara i en punkt $\mathbf{a}$, respektive $\mathbf{G}(\mathbf{a}) \implies \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ differentierbar i punkten $\mathbf{a}$ och dess funktionalmatris blir

$$D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{a}) = D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) * D\mathbf{G}(\mathbf{a})\tag{23}$$

med respektive storlek $p \times n$, $p \times m$ och $m \times n$.

Bevis

$D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{a})$ är per definition den $p \times n$ matris vars (i,j) :te element är

$$\frac{\partial(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{F}_i(\mathbf{G}(\mathbf{x}))(\mathbf{a})\tag{24}$$

och med hjälp av kedjeregeln kan det skrivas som

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial u_k}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\mathbf{a})\tag{25}$$

och detta kan uttryckt i funktionalmatrisernas element ses som

$$\sum_{k=1}^m (D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})))_{ik} (D\mathbf{G}(\mathbf{a}))_{kj}\tag{26}$$

och skrivs det slutligen om med hjälp av matrismultiplikation får vi det önskade resultatet

$$(D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) * (D\mathbf{G}(\mathbf{a})))_{ij}\tag{27}$$

□

6 Variabelbyten

Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

$\mathbf{F}$ måste vara injektiv för godkänt variabelbyte.

Sats 3.3.2

Låt $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ vara en C^1 -funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ en punkt i definitions-mängden så att $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{a})) \neq 0$. Då finns det öppna omgivningar till U och V av $\mathbf{a}$ resp $\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{F} : U \rightarrow V$ är bijektiv och dess invers $\mathbf{F}^{-1} : V \rightarrow U$ också är en C^1 -funktion.

Exempel: Cartesiska $\longleftrightarrow$ Polära koordinater i $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$$

Här ser vi hur man beskriver Cartesiska med hjälp av polära och vice versa.

$$\frac{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)}{\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))} \mid \frac{x = r \cdot \cos(\theta), y = r \cdot \sin(\theta)}{\mathbf{F}^{-1}(r, \theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))}$$

Funktionalmatrisen blir då:

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{-y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Determinanten av $D\mathbf{F}$ blir då

$$\det(D\mathbf{F}) = \frac{1}{r^3}(x^2 + y^2) = \frac{1}{r} \neq 0 \text{ då } r \neq 0. \quad (29)$$

Det vill säga att $\det(D\mathbf{F}) \neq 0$ utanför $(0,0)$. Sats 3.3.2 säger att vi har ett godkänt variabelbyte utifrån $(0,0)$ vilket stämmer. utanför $(0,0)$.