

Sammanfattning LV1 Grupp 1-D

Alice Augustsson, Isac Borghed, David Bååw,
Zackarias Olofsson, Albert Vesterlund, Jacob Westerberg

Februari 2020

1 Flervariabelanalys

Flervariabelanalys har sin grund i frågan: Vad menas med att en funktion av n stycken variabler är differentierbar?

1.1 Differentierbarhet

För att svara på det går vi igenom definitionen av differentierbarhet för en variabel och den är som följer:

Definition: Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}$ och låt $a \in D$. f sägs vara differentierbar i (a) om

I a är en inre punkt i f :s definitionsmängd och det finns en omgivning N av noll sådan att $a + h \in D$ för alla $h \in N$.

II Det finns en konstant $A \in \mathbb{R}$ sådan att $A = f'(a)$ och en funktion

$\rho : N \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ och för alla $h \in N$:

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \rho(h).$$

1.2 Partiell derivata

För att senare kunna definiera differentierbarhet i flera variabler är det viktigt att veta vad partiell derivata är. Partiell derivata används för att derivera en funktion av flera variabler och det går till genom att derivera med avseende på de olika variablerna. Den allmänna definitionen av partiell derivata ser ut som följer: Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ och $(e_1, \dots, e_n)$ är basvektorer till $\mathbb{R}^n$. Då är den partiella derivatan:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (1)$$

Notation: Den partiella derivatan av $f(x, y)$ med avseende på x skrivs f_x .

2 Differentierbarhet i två variabler

Med grund i definitionen för differentierbarhet i envariabelanalys definieras nu differentierbarhet i två variabler.

Definition: Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $(a, b) \in D$. f sägs vara differentierbar i (a, b) om

I (a, b) är en inre punkt till D .

II det finns konstanter $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho(h, k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$ så att

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = A_1h + A_2k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k). \quad (2)$$

För differentierbara funktioner i två variabler gäller följande satser

Sats 2.2.1

Om $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ är differentierbar i punkten $(a, b) \in D$ så är f kontinuerlig i (a, b) .

Sats 2.2.2

Med samma notation som i (2) och i sats 2.2.1 gäller

$$\begin{aligned} A_1 &= f_x(a, b) \\ A_2 &= f_y(a, b). \end{aligned}$$

Sats 2.2.3

För att uttrycka följande sats definieras först mängden C^1 .

Definition Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, då gäller

$$C^1(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ och dess partiella derivator av ordning 1 är kontinuerliga på hela } D\}.$$

Sats 2.2.3 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Om $f \in C^1(D)$ så är f differentierbar i D .

3 Geometrisk tolkning av differentierbarhet i två variabler

Betrakta ett tredimensionellt rum med koordinataxlar x , y och $z = f(x, y)$, där f är en differentierbar funktion i två variabler. Eftersom varje unikt (x, y) i f :s definitionsmängd ger exakt ett z -värde, kan denna funktionen tolkas som en yta i det givna rummet. Välj nu en godtycklig baspunkt

$$(a, b, f(a, b)) := (x_0, y_0, z_0)$$

och en närliggande punkt

$$(a + h, b + k, f(a + h, b + k)) := (x, y, z)$$

som ligger på ytan. Insättning av dessa punkter i definitionen av differentierbarhet i två variabler, tillsammans med ekvationerna i sats 2.2.2, ger att

$$z - z_0 = f_x(a, b)(x - x_0) + f_y(a, b)(y - y_0) + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k), \quad (3)$$

vilket utgör en ekvation för f :s graf i baspunkten. Då (h, k) är litet, blir den sista termen i (3) försumbar och (3) antar formen av ett plans ekvation. Detta plan kallas för tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten (a, b) . En funktion i två variabler är alltså differentierbar i en punkt (a, b) om och endast om den har ett unikt tangentplan där.

4 Differentierbarhet av godtyckligt antal variabler i vektornotation

Genom att utveckla tidigare tankemönster med två variabler går det att konstruera ett uttryck för differentierbarhet av ett godtyckligt antal variabler. Denna generalisering får anses central ty kursens namn - analys i flera va-

riabler. Detta allmängiltiga skrivsättet kan även uttryckas mindre utvecklat utan hjälp av vektornotation. Satserna **2.2.1**, **2.2.2** och **2.2.3** gäller även här men i sin mer generella form.

Definition: Gradienten till f i punkten $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ är vektorn av dess partiella derivator i $\mathbf{a}$, det vill säga

$$\text{grad}(f)(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $\mathbf{a} \in D$. En funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i punkten $\mathbf{a}$ om det finns konstanter $\mathbf{A} \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho(\mathbf{h})$, där $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ sådan att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \sqrt{\mathbf{h}^2} \cdot \rho(\mathbf{h}). \quad (4)$$

5 Riktningsderivator

Definition: För en funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, en baspunkt $\mathbf{a} \in D$ och en enhetsvektor $\hat{\mathbf{u}}$ som pekar i en riktning utifrån $\mathbf{a}$.

Riktningsderivatan till f i punkten $\mathbf{a}$ och riktningen $\hat{\mathbf{u}}$ ges av

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{a}) = f_u(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Med denna definitionen kan man visa en sats som relaterar gradienten av en funktion och dess riktningsderivata.

Sats 2.4.6 Om f är differentierbar i $\mathbf{a} \Rightarrow f_u(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$.

Ur Sats 2.4.6 kan man observera några slutsatser kring en funktion och dess riktningsderivata. Eftersom $f_u = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$ och definitionen av skälärproduk-

ten lyder

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \theta \Rightarrow \\ f_u(\mathbf{a}) &= \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\hat{\mathbf{u}}\| \cos \theta\end{aligned}$$

där $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$ då $\hat{\mathbf{u}}$ är en enhetsvektor och θ är vinkeln mellan $\hat{\mathbf{u}}$ och $\nabla f(\mathbf{a})$. Detta ger tre observationer:

- I Funktionens lutning är störst i riktningen av gradienten
- II Funktionens lutning är minst i motsatt riktning till gradienten
- III Funktionen behåller ett konstant värde ortogonalt mot gradienten.

6 Nivåkurvor

Terminologi: Om man låter $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler och låter $c \in \mathbb{R}$ så kallas punktmängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$ **nivåkurvan** till f på nivå c .

Generalisering för $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ger att $\{(x, y, z) | f(x, y, z) = c\}$ kallas **nivåytan** till f .

7 Kedjeregeln

Fall 1 Om f är en differentierbar funktion av en variabel och $g = g(x_1, \dots, x_n) = g(\mathbf{x})$ är en differentierbar funktion av n variabler så gäller det enligt kedjeregeln att sammansättningen $f \circ g$ är en differentierbar funktion av n variabler. Kedjeregeln ger även

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g) = f'(g(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Fall 2 Om $f = f(x_1, \dots, x_n)$ är en differentierbar funktion av n variabler och $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ är n differentierbara funktioner av en variabel, t . Då gäller det enligt kedjeregeln att sammansättningen $f(\mathbf{g}(t))$ är en differentierbar funktion av t och att

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t).$$

Fall 3 Om $f = f(x_1, \dots, x_m)$ är en differentierbar funktion av m variabler och $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ är m differentierbara funktioner av n variabler, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Då gäller det enligt kedjeregeln att sammansättningen $f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$ är en differentierbar funktion av n variabler och att

$$\frac{\partial}{\partial t_i}[f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t_i}.$$

8 Högre ordningens partiella derivator

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $k \geq 1$ vara ett heltal, då gäller

$C^k(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ och alla dess partiella derivator upp till ordning } k \text{ är kontinuerliga funktioner i } D\}.$

Sats 2.5.9 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen mängd. Om $f \in C^2(D)$ så gäller det att $f_{xy} = f_{yx}$.