

Flervariabelanalys sammanfattning LV2

Isak Drevander, Albin Edenmyr, Viktor Lilja, Simon Paulsson,
Sofia Wartenberg, Leo Ånstrand

Februari 2020

1 Föreläsning 1

Det första som gjordes läsvecka två var att bevisa en del av kedjeregeln, sats 2.3.4 i boken *Analys i flera variabler* [1]. Den lyder på följande sätt.

1.1 Kedjeregeln

Sats 2.3.4 (Kedjeregeln) Låt $f(x_1, \dots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler och $g_1(t), \dots, g_n(t)$ n stycken differentierbara funktioner av en variabel. Då gäller det att sammansättningen $f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ är en differentierbar funktion av en variabel och dess derivata ges utav

$$\frac{d}{dt}(f(g_1(t), \dots, g_n(t))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \dots, g_n(t)) \frac{dg_i}{dt},$$

eller med vektornotation,

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t),$$

där $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ och $\mathbf{g}'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t))$.

För att bevisa följande sats studerar man differanskvoten,

$$\frac{f(\mathbf{g}(t+h)) - f(\mathbf{g}(t))}{h},$$

då $h \rightarrow 0$. Här kan man skriva om täljaren genom att använda att f är en differentierbar funktion. Sedan kan man använda samma villkor för $\mathbf{g}$ och efter förenkling kommer man att ha det som står i satsen och en restterm som går mot 0 då $h \rightarrow 0$.

1.2 Ordningen på derivation spelar ingen roll

Vidare så behandlades sats 2.5.9 om partiell derivering och huruvida ordningen i vilken variablerna deriveras i spelar roll. Satsen formuleras på följande sätt.

Sats 2.5.9. Låt $D \subseteq \mathbb{R}$ vara en öppen mängd, $f \in C^2(D)$, och $(a, b) \in D$. Då gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

Satsen säger att ordningen man deriverar en funktions partiella derivator i inte spelar någon roll, det vill säga att om man ska beräkna f_{xy} spelar det ingen roll om man börjar med att derivera med avseende på x eller y . Eftersom det för de flesta "vanliga" funktioner är trivialt att avgöra huruvida de är C^2 -funktioner används denna sats vanligtvis mycket flitigt utan hänvisning.

Beviset för satsen inför två funktioner av en variabel, $F(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$ och $G(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$. Här gäller det att notera att $F(a + h) - F(a) = G(b + h) - G(b)$. Sedan används medlevärdessatsen från envariabelanalysen två gånger på denna ekvation.

2 Föreläsning 2

Föreläsning 2 behandlade lokala undersökningar av reellvärda funktioner av flera variabler. Vi börjar med att ge definitionen för kritiska punkter och extrempunkter.

2.1 Stationära punkter

Definition. Låt $f(x_1, \dots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler. Punkten $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ sägs vara en **kritisk/stationär** punkt till f om,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Eller om man föredrar $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

En stationär punkt kan antingen vara ett maximum, ett minimum eller en sadelpunkt. Definitionen av ett strikt lokalt maximum lyder som,

Definition. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, och $\mathbf{a} \in D$. f sägs ha ett **strikt lokalt maximum** i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om det finns ett δ så att $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta \implies f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) < f(\mathbf{a})$.

Genom att byta ut ovanstående olikhetstecken mot $>$, $\leq$ eller $\geq$ erhålls definitionen för strikt lokalt minimum, lokalt maximum resp. lokalt minimum. Om den stationära punkten inte uppfyller något av de ovanstående villkoren kallas den för en sadelpunkt.

Proposition: Om f är differentierbar är varje lokal extrempunkt också en stationär punkt.

2.2 Taylorutveckling

I praktiken är det svårt att utifrån definitionen direkt avgöra karaktären av en kritisk punkt. För att kunna jämföra $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$ och $f(\mathbf{a})$ behöver vi känna till funktionen f 's **lokala beteende kring punkten $\mathbf{a}$** . Detta leder oss till följande sats.

Sats (Taylorutveckling för funktioner i flera variabler)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $\mathbf{a} \in D$. Välj $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tillräckligt liten för att klotet kring $\mathbf{a}$ med radie $\|\mathbf{h}\|$ ska rymmas i D . Då gäller att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^m \frac{(\nabla \cdot \mathbf{h})^j}{j!} f(\mathbf{a}) + \frac{(\nabla \cdot \mathbf{h})^{m+1}}{(m+1)!} f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h})$$

där $\xi \in (0, 1)$

Uttrycket $(\nabla \cdot \mathbf{h})$ är här en differentialoperator som vid exponentiering utvecklas enligt binomialsatsen. Till exempel blir $(\nabla \cdot \mathbf{h})^2 f(\mathbf{a})$ för $n = 2$ lika med

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Notera att den sista termen i uttrycket är en summa av termer av typen $\text{konstant} \cdot h^u k^v$ där $u + v = m + 1$, eftersom alla $(m + 1)$:a gradens partiella derivator till f är kontinuerliga och därmed begränsade i $(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h})$. Detta medför att sista termen är $O(\|\mathbf{h}\|^{m+1})$.

Fallet då $n = m = 2$, d.v.s. Taylorutvecklingen av andra ordningen för en funktion i två variabler, används ofta och har en egen sats i Persson och Böiers:

Sats 2.6.10 Låt $f(x, y)$ vara en C^3 -funktion i den öppna mängden D , och antag att punkten (a, b) tillhör D . Då är

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) + O((h^2 + k^2)^{3/2})$$

Bevisiden är att definiera en funktion $F(t) = f(a + th, b + tk)$ där $0 \leq t \leq 1$, taylorutveckla $F(t)$ som i envariabelanalys och till sist sätta $t = 1$.

3 Föreläsning 3

Föreläsning 3 handlade om klassificering av stationära punkter.

3.1 Klassificering av stationära punkter

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in D$, $f \in C^3(D)$ och antag att (a, b) är en stationär punkt till f . Om funktionen taylorutvecklas kring den stationära punkten och $f(a, b)$ subtraheras från vänster- och högerledet erhålles:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}[h^2 \cdot f_{xx}(a, b) + 2hk \cdot f_{xy}(a, b) + k^2 \cdot f_{yy}(a, b)] + O((h^2 + k^2)^{3/2})$$

Om man sätter $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$, kan man definiera funktionen $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$. Tecknet på Q kommer att avgöra tecknet på differensen $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ vilket i sin tur avgör om punkten (a, b) är ett maximum, minimum eller sadelpunkt. Funktionen Q har en väldigt speciell form och har fått en egen definition som lyder som,

Definition. En funktion $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på formen $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, där $A, B, C \in \mathbb{R}$ kallas för en binär kvadratisk form.

Med hjälp av funktionen $Q(h, k)$ kan man klassificera stationära punkter. Man skiljer på 4 olika fall som sammanfattas i tabell 1. Om Q är positivt definit innebär det att $Q(h, k) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$. Detta leder till att differensen $f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0 \iff (a+h, b+k) > f(a, b)$ vilket innebär att punkten (a, b) är ett minimum. Om Q är negativt definit implicerar det av samma anledning att punkten (a, b) är ett maximum. Om Q är indefinit antar funktionen både positiva och negativa värden vilket innebär att differensen $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ också kan anta både positiva och negativa värden vilket leder till att (a, b) är en sadelpunkt. I det sista fallet då Q är semi-definit kan inget sägas om punkten (a, b) .

Tabell 1: Klassificering av stationära punkter

$AC - B^2$	A	$Q(x, y)$	(a, b)
> 0	> 0	Positivt definit	Maximum
> 0	< 0	Negativt definit	Minimum
< 0	-	Indefinit	Sadelpunkt
$= 0$	-	Semi-definit	-

4 Föreläsning 4

Under föreläsning 4 pratades det om vektorvärda funktioner och linjärisering av dessa. Vidare togs kedjeregeln upp och avslutningsvis gick vi igenom variabelbyte.

4.1 Vektorvärda funktioner

Definition. Låt n och m vara positiva heltal. En funktion $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kallas för en vektorvärd funktion av n variabler. Det skrivs,

$$\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Definition. $\mathbb{F}$ sägs vara differentierbar om varje F_i är det.

4.2 Linjärisering av vektorvärda funktioner

Eftersom vi tidigare kollat på Taylorutvecklingar och linjäriseringar av flervariabelsfunktioner kan det tänkas vara användbart att härleda en generell linjärisering för vektorvärda funktioner också.

Låt $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ och $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ vara kolonnvektorer. Eftersom varje F_i är differentierbar finns det för varje i en linjärisering till F_i :

$$F_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F_i(\mathbf{a}) + \nabla F_i(\mathbf{a}) * \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \rho_i(\mathbf{h})$$

där $\rho_i \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow 0$ för varje i . Om man staplar alla dessa linjäriseringar på varandra i en kolonn får man

$$\mathbb{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbb{F}(\mathbf{a}) + D\mathbb{F}(\mathbf{a}) * \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \boldsymbol{\rho}(\mathbf{h})$$

där $\boldsymbol{\rho}$ är en kolonnvektor av alla restfunktioner $(\rho_1(\mathbf{h}), \dots, \rho(\mathbf{h}))$ och $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \mathbf{0}_m$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$, och $D\mathbb{F}(\mathbf{a})$ är den $m \times n$ matris vars (i, j) :te element är $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$. Denna matris kallas funktionalmatrisen / Jacobimatrisen av $\mathbb{F}$ i punkten $\mathbf{a}$, och kan ses som en kolonnvektor av alla outputfunktionernas gradienter.

4.3 Kedjeregeln

Sats (Kedjeregeln för vektorvärda funktioner) Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ och $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Låt $\mathbb{G} : D \rightarrow U$ och $\mathbb{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ vara två differentierbara vektorvärda funktioner. Då gäller att även sammansättningen $\mathbb{F} \circ \mathbb{G} : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ är en differentierbar funktion och dess Jacobimatris i punkten $\mathbf{a} \in D$ är,

$$D(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(\mathbf{a}) = [D\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbf{a}))][D\mathbb{G}(\mathbf{a})].$$

Notera att uttrycket i högerledet är en matrismultiplikation.

Bevis. $D(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})$ är per definition den $p \times n$ matris vars (i, j) :te element är

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbb{F} \circ \mathbb{G})}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n))(\mathbf{a}) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial u_k}(G(\mathbf{a})) \frac{\partial G_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m (D\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbf{a})))_{ik} (D\mathbb{G}(\mathbf{a}))_{kj} = \\ &= (D\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbf{a})) D\mathbb{G}(\mathbf{a}))_{ij} \end{aligned}$$

□

4.4 Variabelbyte

Sats 3.3.2. Låt $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ vara en C^1 -funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ en punkt i definitionsmängden så att $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{a})) \neq 0$. Då finns det öppna omgivningar u och v av $\mathbf{a}$ respektive $\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{F} : u \rightarrow v$ är bijektiv och dess invers $\mathbf{F}^{-1} : v \rightarrow u$ är också C^1 .

Exempel - Cartesiska till polära koordinater i $\mathbb{R}^2$

Variablerna r och θ kan i variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$ skrivas om i termer av x och y , och vise versa, enligt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

respektive

$$x = r \cos(\theta)$$
$$y = r \sin(\theta).$$

För att ta reda på om detta är ett godkänt variabelbyte så ska, enligt *Sats 3.3.2* funktionalmatrisens determinant undersökas.

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^3}(x^2 + y^2) = \frac{1}{r}.$$

I synnerhet är denna determinant nollskild och definierad för alla

$(x, y) \neq (0, 0)$, vilket enligt *Sats 3.3.2* medför att variabelbytet är godkänt. $\square$

Referenser

- [1] Arne Persson, Lars-Christer Böiers. Analys i flera variabler. 3 uppl. Lund: Studentlitteratur AB; 2015.