

Sammanfattning av läsvecka 2 i Flervariabelanalys

Filip Rydin, Victor Salomonsson,
Elias Stenhede Johansson, Richard Svensson,
Valter Schütz och Alexander Malmquist

Februari 2020

1 Måndag

1.1 Kedjeregeln

Låt $f(x_1, \dots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler.

Låt $g_1(t), \dots, g_n(t)$ vara n stycken differentierbara funktioner av en variabel.

$\implies$ sammansättningen $f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ är också differentierbar och

$$\frac{d}{dt}f(g_1(t), \dots, g_n(t)) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \dots, g_n(t)) \cdot \frac{dg_i}{dt} \right]$$

Bevisidé: Utgå från derivatans definition och använd dig av det faktum att funktionerna är differentierbara.

1.2 Sats 2.5.9

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd, $f \in C^2(D)$ och $(a, b) \in D$.

$\implies f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$

Bevisidé: Betrakta

$$q(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - (f(a+h, b) - f(a, b))$$

Detta kan skrivas om på två olika sätt som en differens av en funktion av en variabel. Användning av medelvärdessatsen för en variabel och division med hk leder fram till uttrycken $f_{xy}(a, b)$ respektive $f_{yx}(a, b)$.

2 Tisdag

2.1 Taylors formel av andra ordningen i två variabler

Låt $f(x, y)$ vara en C^3 -funktion i den öppna mängden $D \in \mathbf{R}^2$ och antag att punkten (a, b) tillhör D . Då är

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2] + \mathcal{O}(|h, k|^3)$$

taylorutvecklingen av andra graden av funktionen f i punkten (a, b) .

Bevisidé: Vi överför situationen på det en dimensionella fallet genom att betrakta funktionen

$$F(t) = f(a + th, b + tk), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Det är klart att F blir av klassen C^3 . Använd Maclaurins formel för funktioner av en variabel. Av kedjeregeln får vi då F' och analogt F'' . Sätt sedan $t = 1$.

3 Torsdag

3.1 Kritiska punkter

En kritisk/stationär punkt $\mathbf{a}$ för en differentierbar funktion är en punkt där alla de partiella derivatorna är noll. Det vill säga $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

En kritisk punkt kan antingen vara ett lokalt minimum, ett lokalt maximum, eller en sadelpunkt. För att klassificera en kritisk punkt i specialfallet då f är en funktion av två variabler, kan man använda sig av andra ordningens taylorpolynom runt punkten.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \cancel{f'_x(a, b)h} + \cancel{f'_y(a, b)k} + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)h^2 + 2hkf''_{xy}(a, b) + k^2f''_{yy}(a, b)] + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}})$$

Av detta följer

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)h^2 + 2hkf''_{xy}(a, b) + k^2f''_{yy}(a, b)] + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}).$$

Nära (a, b) dominerar andra ordningens termer, därav kan resttermen försummas. Sätt sedan $A = \frac{1}{2}f''_{xx}(a, b)$, $B = \frac{1}{2}f''_{xy}(a, b)$, $C = \frac{1}{2}f''_{yy}(a, b)$, detta ger

$$\frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)h^2 + 2hkf''_{xy}(a, b) + k^2f''_{yy}(a, b)] = h^2A + 2hkB + k^2C$$

Låt $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, detta kallas för binär kvadratisk form. Med hjälp av denna information kan sedan följande samband härledas med hjälp av kvadratkomplettering:

$AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \implies Q(x, y)$ positiv definit. $\implies$ strikt minimum.

$AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \implies Q(x, y)$ negativ definit. $\implies$ strikt maximum.

$AC - B^2 < 0 \implies Q(x, y)$ indefinit $\implies$ sadelpunkt.

$AC - B^2 = 0 \implies Q(x, y)$ semidefinit $\implies$ mer information krävs för att klassificera punkten.

3.2 Vektorvärda funktioner

Definition: En funktion $\mathbf{F}$ kallas för en vektorvärd funktion av n variabler om $\mathbf{F}$ är en funktion från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ där $n, m \in \mathbf{N}$.

Definition: Differentierbarhet hos en vektorvärd funktion definieras som att varje komponent F_i är differentierbar.

En generell formel för differentierbarhet av en vektorvärd funktion kan fås genom att applicera formeln för differentierbarhet på var enskild komponent F_i i vektorn. Det förutsätter att alla komponenter är differentierbara så att det existerar $\forall F_i$ en funktion $\rho_i(\mathbf{h})$ där $\rho_i \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow 0$.

En godtycklig komponent kan då uttryckas som:

$$F_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F_i(\mathbf{a}) + \nabla F_i(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \rho_i(\mathbf{h})$$

Applicerat på $\mathbf{F}$ och uttryckt i termer av matriser fås

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{a}) \\ F_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{a}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\nabla F_1)^T \\ (\nabla F_2)^T \\ \vdots \\ (\nabla F_n)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \dots \\ \mathbf{h}_n \end{bmatrix} + |\mathbf{h}| \vec{\rho}(\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{a}) + D\mathbf{F}(\mathbf{a}) * \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

Där $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$ är *funktionalmatrisen/jacobianen* och definieras som

$$\nabla \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

3.3 Kedjeregeln för sammansättning av vektorvärda funktioner i flera variabler

Obs. Steg 4 av teori för kedjeregeln i flervariabelanalys. Följande sats relaterar funktionalmatrisen för sammansättningen av två vektorvärda funktioner med funktionalmatriserna för funktionerna.

Sats:

Antag att vi har två funktioner

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ och } \mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

och en sammansättning av dessa:

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

samt att $\mathbf{G}$ och $\mathbf{F}$ differentierbara och $\mathbf{a}$ en punkt i $\mathbb{R}^n$

Då gäller att:

$$D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{a}) = D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \cdot D\mathbf{G}(\mathbf{a}).$$

Bevisidé:

Använd definitionen av funktionalmatris och steg 3 för kedjeregeln för ett element i vänsterledet och bevisa att det är lika med samma element i högerledet.

3.4 Variabelbyten

Ett variabelbyte kan ses som ett specialfall av en vektorvärd funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vilket resulterar i att

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)) := (y_1, \dots, y_n).$$

Då variabelbytet skall vara giltigt måste funktionen vara injektiv. Detta kan kontrolleras genom att man antar att $\mathbf{F}$ är differentierbar och lineariserar i en punkt $\mathbf{a}$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + D\mathbf{F}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}).$$

Med hjälp av linjär algebra så inses att $\mathbf{F}$ endast är injektiv då $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$ är inverterbar vilket innebär att dess determinant är nollskilljd. Den relevanta satsen för sammanhanget kallas 3.3.2 i boken och lyder:

Låt $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ vara en C^1 -funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{a}$ en punkt i definitionsmängden $\det(D\mathbf{F}(\mathbf{a}) \neq 0)$. Då finns det öppna omgivningar u och v av $\mathbf{a}$ resp. $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ s.a. $\mathbf{F} : u \rightarrow v$ är bijektiv och dess invers $\mathbf{F}^{-1} : v \rightarrow u$ också är C^1 .

Ett viktigt exempel på variabelbyten är polära koordinater till Cartesiska koordinater och tillbaka igen. Vid beräkning så inses att funktionaldeterminanten för denna avbildning är nollskild då $r \neq 0$, vilket enligt satsen ovan innebär att det är ett godkänt variabelbyte i alla andra fall (något som stämmer med intuitionen).