

Sammanfattning LV3

Pontus Gustafsson, Liam Cotton, Martin Jirlow,
Elin Hiljemark, Semla Moqvist, Oscar Nilsson

February 2020

1 Implicita funktionssatsen

Implicita funktionssatsen för två variabler

Låt $F(x,y)$ vara en C^1 -funktion och (a,b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = c$. Om $F_y(a,b) \neq 0$ finns det en omgivning U av (a,b) så att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion $y = f(x)$. För derivatan gäller $f'(x) = \frac{-F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$.

Vi avstår från bevis men noterar att givet existensen av en sådan omgivning U , formeln för $f'(x)$ följer från implicit derivering (dvs kedjeregeln).
 $F(x,y) = c$ och $y = f(x)$, tänk variabelbytet $u = x$, $v = f(x)$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x,y) = F(u,v) = F(x, f(x)) &\Rightarrow \frac{dF}{dx} = 0 = \frac{\partial F \cdot du}{\partial u \cdot dx} + \frac{\partial F \cdot dv}{\partial v \cdot dx} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}. \end{aligned}$$

Implicita funktionssatsen för godtyckligt antal variabler

Om man istället låter $F(\mathbf{x})$ vara en funktion av $n + 1$ variabler och $\mathbf{a}$ vara en punkt på nivåkurvan $F(\mathbf{x}) = C$ går det att implicit definiera en funktion $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ i en omgivning U kring $\mathbf{a}$ under förutsättningen att $F_{x_{n+1}}(\mathbf{a}) \neq 0$. Då gäller, i likhet med satsen ovan, att

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-F_{x_i}}{F_{x_{n+1}}} \quad (1)$$

Där $i = 1, 2, \dots, n$

2 Dubbelintegraler

Kom ihåg från envariabelanalysen

1. En definit integral definieras som en tecknad area. $\int_a^b f(x)dx$ = Den tecknade arean mellan grafen $y = f(x)$ och x -axeln i intervallet $[a,b]$.

- Varför en tecknad area?

Svar 1: Då blir integration en linjär operation, dvs

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Svar 2: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ kan tolkas som medelvärdet av $f(x)$ på intervallet $[a,b]$.

För att göra detta mer rigoröst inför man Riemannsummor och definierar integralen som ett gränsvärde av summorna.

2. **Kalkylens fundamentalssats** : Om $F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Generalisering till fler variabler, fokus 2, s.k dubbelintegral

" **Definition** ": Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$. $\iint_D f(x,y) dx dy$ = Den tecknade volymen mellan grafen $z = f(x,y)$ och arean D i xy -planet.

Geometrisk definition av (definit) dubbelintegral

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, D begränsad. $\iint_D f(x,y) dx dy$ består av delarna $f(x,y) dx dy$ vilka motsvarar en infinitesimal liten volym, $f(x,y)$ som motsvarar höjden och $dx dy$ som motsvarar en infinitesimal liten rektangel i xy -planet.

Olika tekniker för exakta beräkningar av dubbelintegraler

1. Inspektion, utnyttja
 - Definition som en tecknad volym.
 - Linjäritet, dvs $\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy$.
 - eventuella symmetrier
2. Fubinis sats (se senare avsnitt).
3. Variabelbyte
 - Allmänna satsen.
 - Viktigaste exemplet: Cartesiska $\longrightarrow$ Polära.
4. Dubbelintegralen av vissa sorters sammansatta funktioner mha nivåkurvor.

Fubinis sats för Axelparallella Rektanglar (Sats 6.1.2, 6.1.3)

Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion och låt Δ vara en **axelparallell rektangel**.

$\Delta = \{(x,y) | a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\}$. Då gäller:

$$\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy = \int_b^d \left(\int_a^c f(x,y) dx \right) dy = \int_a^c \left(\int_b^d f(x,y) dy \right) dx$$

Intuitivt: Skivning av volymen på 2 olika sätt. Observera att det, vid uträkning, kan vara enklare att integrera med avseende på den ena variabeln först snarare än den andra.

Fubinis sats 2.0 (Sats 6.2.4)

Låt $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner av x , så att $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Om $f(x, y)$ är kontinuerlig gäller:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

D sägs vara reguljärt i x -led. Ett område som är reguljärt i både x - och y -led ger två alternativa ordningar för integralen.

3. Variabelbyten i dubbelintegraler

Notation: Låt $(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow (y_1, \dots, y_n)$ vara ett C^1 -variabelbyte. Dvs varje y_i är en C^1 -funktion av $(x_1, \dots, x_n)$ och varje x_i är en C^1 -funktion av $(y_1, \dots, y_n)$. Det hela makear sense då $\longleftrightarrow$ är $1-1$.

Som vi tidigare sett, det som ska gälla är att funktionalmatrisen $D\mathbb{F} = [\dots \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dots]_{i,j}^n$ ska ha en nollskild determinant.

Skrivsätt:

$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ är funktionalmatrisen, $\frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}$ är dess determinant, vilken också är bestämd till att vara $\frac{1}{J(y_1, \dots, y_n)}$ om $(x_1, \dots, x_n)$ är givna.

Notera:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \left[\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]^{-1} \Rightarrow \frac{d(x_1, \dots, x_n)}{d(y_1, \dots, y_n)} = \frac{1}{\frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}}$$

Sats 6.4.6

Låt $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet sådan att $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ i E . Då är

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv.$$

Viktigt exempel: Polära koordinater

Låt $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $J(r, \theta) = \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \det \dots = r \Rightarrow dx dy = r \cdot dr d\theta$.

4. Dubbelintegral med hjälp av nivåkurvor

Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^1 , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^0 . $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kvadrerbart och antag att $a \leq g(x, y) \leq b \ \forall (x, y) \in D$. Sätt $A(u) = \text{Area}\{(x, y) \in D | g(x, y) \leq u\}$. Då gäller att:

$$\iint_D h(g(x, y)) \, dx \, dy = \int_a^b h(u) A'(u) \, du.$$

Generaliserade dubbelintegraler

Gauss Sats

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Bevis

$$\text{Låt } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx. \text{ Då är } I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy.$$

Byte till polära koordinater ger:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} \, dr = \pi$$

Alltså, $I^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$.

Teori

Definition 0.1

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att $a \leq c, b \leq d$. Mängden $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ given av

$$\Delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\}$$

kallas för en (sluten) axelparallell rektangel.

Notation: $\Delta = [a, c] \times [b, d]$.

Definition 0.2

Givet $a \leq b$, en partition av det slutna intervallet $[a, b]$ är en ändlig sekvens

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Definition 1 (s. 228-9)

Givet en axelparallell rektangel $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ och partitioner

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$$

$$b = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

så kallas en funktion $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ för en trappfunktion om Φ har ett konstant värde på varje delrektangel $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Definition 2 (s.233)

Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. f sägs vara integrerbar över Δ om det $\forall \epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ på Δ sådana att

1. $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta,$
2. $\iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy < \epsilon.$

Notera att om f är integrerbar över Δ gäller att

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy &:= \limsup_{\Phi \leq f \text{ punktvis i } \Delta} \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \\ &= \liminf_{\Psi \geq f \text{ punktvis i } \Delta} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Sats 6.1.3

Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel, och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då gäller:

1. f är integrerbar över Δ ,
2. $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_b^d dy \int_a^c f(x, y) dx = \int_a^c dx \int_b^d f(x, y) dy.$

Beviside till sats 6.1.3

För beviset av sats 6.1.3 behövs tre stycken lemmor.

Lemma 1

Låt $K \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd, dvs. en sluten och begränsad mängd, och låt $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då är f *likformigt kontinuerlig* på K , dvs $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ så att

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K) \text{ och } \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \epsilon \quad (2)$$

Lemma 2

Om $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ och $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion, existerar båda de itererade enkelintegralerna

$$\int_b^d dy \left(\int_a^c f(x, y) dx \right) \text{ och } \int_a^c dx \left(\int_b^d f(x, y) dy \right).$$

Lemma 3

Om $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ och $\Phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ är en trappfunktion, då är

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \int_a^c dx \left(\int_b^d \Phi(x, y) dy \right) = \int_b^d dy \left(\int_a^c \Phi(x, y) dx \right).$$