Flervarre LV1

Oscar Wernqvist, Filip Aldebrink, Ludvig Rodung
Hevar Djeza, Isak Wikman, Lowe Fareld Krågen

23 februari 2020

1 Föreläsning 1

1.1 Första och andragradsytor i rummet, $a, b, c \in \mathbb{R}$

linje i planet

$$ax + by = c \tag{1}$$

Plan i rummet

$$ax + by + cz = d \tag{2}$$

Ellips (cirkel då $a^2 = b^2$)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = r^2 \tag{3}$$

Parabel

$$x^2 = y, y^2 = x \tag{4}$$

Hyperbel

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Ellipsoid (sfär då $a^2 = b^2 = c^2$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

Cylinder

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{7}$$

Kon

$$z^2 = c^2(x^2 + y^2) \tag{8}$$

Paraboloid

$$z = c^2(x^2 + y^2) \tag{9}$$

Hyperboloid

$$z = c^2(x^2 - y^2) \tag{10}$$

1.2 Derivatans Definition i envariabelanalys

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{11}$$

$$\exists A \in \mathbb{R}, \rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(a+h) - f(a) = hA + h\rho(h), \text{där } \rho(h) \to 0 \text{ då } h \to 0 \tag{12}$$

2 Föreläsning 2

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$, där $n \in \mathbb{N}$. En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ kallas för en reellvärd funktion av n (reella) variabler.

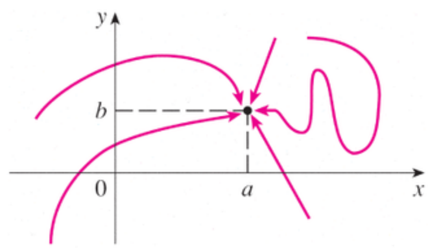
$$\begin{aligned} f : &D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n). \end{aligned} \tag{13}$$

Grundfrågan: Vad (skulle kunna) menas med en funktion f av n variabler är differentierbar?

Repetition $n = 1$:
Vi ger 3 olika formuleringar av begreppet:

1. Låt $D \subseteq \mathbb{R}$ $a \in D$. En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sägs vara differentierbar i $x = a$ om:
   - (i) f är definerad i en omgivning av a
   - (ii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar ($:=f'(a)$)
2. (ii) Sätt $A := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h-f(a)}{h}$
   $\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h-f(a)}{h} - A := \rho(h)$, någon funktion av h så att $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$
   (Omformulering (ii) kallas för f:s linjärisering kring $x = a$)
   $\Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = h \cdot A + h \cdot \rho(h)$, där $A \in \mathbb{R}$, $\rho(h) \to 0$ då $h \to 0$
3. f är differentierbar i $x = a$ om grafen $y = f(x)$ har en (unik) tangentlinje i $x = a$.

Generalisering till $n \geq 2$:



Figur 1: Vi betraktar $n = 2$ (allt väsentligt sker redan här). Vi har $f(x, y)$: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{förändringen i output}}{\text{förändring i input}} \tag{14}$$

När $n \geq 2$ finns det oändligt många olika riktningar som man kan ändra ”input” med.

2.1 Partiella Derivator

Man väljer en rikting $\|$ med en koordinataxel $\Leftrightarrow$ Håll alla utom en av input variablerna konstanta

Def: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $(a, b) \in D$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Mer allmänt: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ och $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e_i}) - f(\vec{a})}{h}, \text{ där } \{e_1, ..., e_n\} \text{ är standardbasen i } \mathbb{R}^n \tag{15}$$

Beräkning: Partiella derivator beräknas som i Envariabelanalys.

Ex: Låt $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | y = 0\}$ ges av $f(x, y) = x^2 \cdot y^3 + \frac{x}{y}$. Bestäm f_x och f_y i $(1, 1)$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x \cdot y^3 + \frac{1}{y} \doteq 2 \cdot 1 \cdot 1^3 + \frac{1}{1} = 3 \\ f_y &= 3x^2 \cdot y^2 - \frac{x}{y^2} \doteq 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - \frac{1}{1^2} = 2 \end{aligned} \tag{16}$$

Vi noterar att $f_x(1, 1) \neq f_y(1, 1)$. Lutningen kan bero på riktningen.

2.2 Rigorös definition av differentierbarhet

En variabel:

Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}$ och $a \in D$. f sägs vara differentierbar i punkten a om:

(i) a är en inre punkt i f:s definitionsmängd, dvs det finns en omgivning N av noll så att $a + h \in D$ $\forall h \in N$

(ii) det finns en konstant $A \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho : N \to \mathbb{R}$ så att $\forall h \in N$: $f(a + h) - f(a) = Ah + h\rho(h)$ och $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$. [Def: A kallas för derivatan till f i punkten a]

Två variabler:

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] + [f(a+h, b) - f(a, b)]$

Def: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}$ och låt $(a, b) \in D$. f sägs vara differentierbar i (a, b) om:

(i) det finns en omgivning N av $(0, 0)$ så att $(a+h, b+k) \in D$ $\forall (h, k) \in N$

(ii) det finns konstanter $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho : N \to \mathbb{R}$ så att $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$, och
$\forall (h, k) \in N : f(a+h, b+k) - f(a, b) = A_1 h + A_2 k + \rho(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} (\star)$

Sats 2.2.1

Om $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är differentierbar i punkten (a, b) så är f kontinuerlig i (a, b)

Bevis: Tag $(\star)$ och låt $(h, k) \to (0, 0)$. Ty $\rho(h, k) \to 0$ per definition, så är det uppenbart att hela $HL \to 0 \implies VL \to 0$, det vill säga
$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a + h, b + k) = f(a, b)$, det vill säga f är kontinuerlig i (a, b). $\square$

Sats 2.2.2

Med samma notation som i $(\star)$ och i föregående sats så gäller:
$A_1 = f_x(a, b)$
$A_2 = f_y(a, b)$

Bevis: Vi ger beviset för A_1: Samma metod för A_2.
Per definition av partiell derivata:

$$f_x(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \overset{(\star)}{=}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{A_1 h + \mid h \mid \rho(h, 0)}{h} = A_1 \pm \lim_{h\to 0} \rho(h, 0) = A_1 \pm 0 = A \quad \square$$

Notation: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd.

$C^0(D) = \{f : D \to \mathbb{R} | f$ är kontinuerlig i hela $D\}$

$C^1(D) = \{f : D \to \mathbb{R} |$Alla f:s partiella derivator existerar i hela D och både f och dess partiella derivator är kontinuerliga funktioner i hela $D\}$

Sats 2.2.3
Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Om $f \in C^1(D)$ så är f differentierbar i hela D.

Poäng: Att avgöra huruvida en given f är differentierbar direkt utifrån definitionen kan vara krångligt. Det man måste göra är att ansätta:

$n = 2$:

$$\rho(h,k) = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h \cdot f_x(a,b) - k \cdot f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{17}$$

och verifiera att $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0$. [Bevis för satsen kommer framöver]

2.3 Geometrisk tolkning av differentierbarhet (i 2 variabler)

($\star$) $f(a+h,b+k) - f(a,b) = h \cdot f_x(a,b) + k \cdot f_y(a,b) + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \rho(h,k)$
Vi betraktar grafen till $f(x,y)$. Rent allmänt definierar då $z = f(x,y)$ någon yta i $\mathbb{R}^3$. Sätt (a,b) till baspunkt och gå till grafen $z = (a,b)$, då får vi baspunkten $(a,b,f(a,b))$ för grafen. Betrakta den närliggande punkten $(a+h,b+k,f(a+h,b+k))$ på grafen.
Sätt nu in allting i ($\star$). En approximation till $f(x,y)$:s graf i baspunkten fås då av

$$z - z_0 = f_x(a,b)(x-x_0) + f_y(a,b)(y-y_0), \tag{18}$$

som kallas för tangentplanet till $f(x,y)$:s graf i punkten $(a,b,f(a,b))$.

3 Föreläsning 3

3.1 Differentierbarhet av funktion med godtyckligt antal variabler (vektornotation)

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, och låt $\vec{a} \in D$. En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sägs då vara differentierbar i $\vec{x} = \vec{a}$ om:

$\exists \nabla f(\vec{a})$ och en funktion $\rho(\vec{h})$ där $\rho(\vec{h}) \to 0, \vec{h} \to \vec{0}$ s.a

$$f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h} + ||\vec{h}||\rho(\vec{h}) \tag{19}$$

I definitionen ovan betecknar $\nabla f(\vec{a})$ den vektor som innehåller alla partiella derivator av f i punkten $\vec{a}$ och kallas för f:s gradient i $\vec{a}$:

$$\nabla f(\vec{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})) \tag{20}$$

3.2 Riktningsderivata

<u>Sats 2.4.1:</u> Givet en baspunkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, kan varje riktning utifrån $\vec{a}$ bestämmas av en enhetsvektor $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$

<u>Definition av riktningsderivata:</u> Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd, låt $\vec{a} \in D$ och enhetsvektorn $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$. Riktningsderivatan till en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ i punkten $\vec{x} = \vec{a}$ i riktningen $\hat{u}$ ges då av:

$$f_u(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\overrightarrow{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\hat{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \tag{21}$$

<u>Sats 2.4.6:</u> Om f är differentierbar i $\vec{x} = \vec{a}$ så är:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{u} \tag{22}$$

4 Föreläsning 4

<u>**Sats 2.4.7:**</u> $\nabla f(\vec{a})$ pekar i den riktning där f växer snabbast i $\vec{a}$, och den maximala tillväxthastigheten är $||\nabla f(\vec{a})||$.

<u>**Bevisidé:**</u> Eftersom riktningsderivatan i en riktning $\vec{u} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{u}$ antar denna sitt största värde då $\vec{u}$ och $\nabla f(\vec{a})$ är parallella. Riktningsderivatan är då lika med $||\nabla f(\vec{a})|| \cdot ||\hat{u}||$. Då $||\hat{u}|| = 1$ är riktningsderivatan $||\nabla f(\vec{a})||$.

<u>**Sats 2.4.8:**</u> Låt $f(x, y)$ vara en C^1 funktion. Då är $\nabla f(a, b)$ en normalvektor till fs nivåkurva i (a, b). $(\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$. På samma sätt för en funktion $f(x, y, z)$ är $\nabla f(a, b, c)$ en normalvektor till fs nivåyta i (a, b, c)

4.1 Kedjeregeln för derivering av sammansatta funktioner

Vi bygger upp kedjeregeln i fyra steg. Nedan redogörs för de tre första.

<u>**Steg 1:**</u>
För derivering av sammansatta funktioner i en variabel vet vi sen innan att om f och g är differentierbara funktioner så är sammansättningen $f \circ g$ också differentierbar, och

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) * g'(t). \tag{23}$$

Ur (22) följer då direkt att för $g = g(x_1, ..., x_n)$ så gäller,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(g(x_1, ..., x_n) = f'(g(x_1, ..., x_n)) * \frac{\partial g}{\partial x_i}, \tag{24}$$

där $i = 1, ..., n$.

<u>**Steg 2:**</u>
Vi låter f vara en differentierbar funktion av m variabler $f = f(x_1, ..., x_m)$ och $g_1, g_2, ..., g_m$ vara m stycken differentierbara funktioner av en variabel t. Då gäller

$$\frac{d}{dt}(f(g_1(t), ..., g_m(t))) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), ..., g_m(t))\frac{d}{dt}g_i. \tag{25}$$

<u>**Steg 3:**</u>
Låt nu f vara en differentierbar funktion av m variabler $f = f(x_1, ..., x_m)$ och $g_1, g_2, ..., g_m$ vara m stycken differentierbara funktioner av n stycken variabler $t_1, t_2, ..., t_n$. Då gäller att sammansättningen $f(g_1(t_1, ..., t_n), ..., g_m(t_1, ..., t_n))$ är en differentierbar funktion av $t_1, t_2, ..., t_n$, och

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(f(g_1(t_1, .., t_n), .., g_m(t_1, .., t_n))) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(t_1, .., t_n), .., g_m(t_1, .., t_n))\frac{\partial g_j}{\partial t_i}, \tag{26}$$

där $i = 1, ..., n$.

4.2 Högre ordningens partiella derivator

<u>**Notation:**</u> Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd.

$C^k(D) = \{f : D \to \mathbb{R} | f$ och alla dess partiella derivator upp till ordning k existerar och är kontinuerliga i hela $D\}$

<u>**Definition:**</u> Om en funktions partiella derivator är partiellt deriverbara är dessa högre ordningens partiella derivator. Exempelvis en C^2 funktion $f(x, y)$ som först partiellt deriveras med avseende på x och sedan med avseende på y.

<u>**Notation (Persson Böiers):**</u>

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \tag{27}$$

<u>**Sats 2.5.9:**</u> Om $f(x, y)$ är en funktion av klass C^2 så är $f_{xy} = f_{yx}$. Mer generellt så spelar inte ordningen av partiella derivator roll för en funktion $f(x_1, ..., x_n)$ tillhörande klass C^k för alla partiella derivator upp till ordning k.