

Flervariabelanalys läsvecka 3

Elin Eklund	Dennis Hjertén	Andreas Lund
Gustav Persson	Isabella Tepp	Samuel Winqvist

23 februari 2020

1 Implicita funktionssatsen

1.1 För två variabler

Det går inte alltid att uttrycka en funktion beroende av bara en variabel, x . Till exempel så har vi enhetscirkeln som är en implicit funktion beroende av två variabler, $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Över hela intervallet kan man inte definiera funktionen som $y = f(x)$ men kring små omgivningar går det.

Låt $F(x, y)$ vara en C^1 -funktion och låt (a, b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $F'_y(a, b) \neq 0$ så finns det en omgivning U av (a, b) så att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion, $y = f(x)$. För derivatan gäller:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (1)$$

Härledningen till implicita funktionssatsen fås genom variabelbyterna $u = x$ och $v = f(x)$ samt kedjeregeln. Eftersom implicita funktionssatsen används på nivåkurvor (för två variabler) så hålls alltid funktionens värde konstant vilket innebär att $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Kedjeregeln och variabelbytet ger följande:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot f'(x) = 0. \quad (2)$$

Från detta fås

$$f'(x) = -\frac{f_u}{f_v} = -\frac{f_x}{f_y}. \quad (3)$$

Rent algebraiskt får f_y uppenbarligen inte vara 0 men observera även att gradienten till f är (f_x, f_y) och då $f_y = 0$ är gradienten horisontell och tangenten därmed vertikal. Detta innebär att i en liten omgivning till den punkten då $f_y = 0$ finns det två x -värden för ett y -värde, vilket inte går för en funktion.

1.2 För n variabler

Låt $F(x_1, \dots, x_{n+1})$ vara en C^1 -funktion och låt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ vara en punkt på nivåytan $F(\vec{x}) = C$. Om $F_{x_{n+1}}(\vec{a}) \neq 0$ finns det en omgivning U av (a, b) så att restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en annan C^1 -funktion, $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$. För derivatan gäller:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_{x_{n+1}}} \quad (4)$$

där $i = 1, 2, \dots, n$.

Det implicita funktionssatsen säger är att om någon av de partiella derivatorna är skild från noll så finns det omgivning där man kan eliminera denna variabel och uttrycka den som en funktion av de resterande variablerna. Till exempel en funktion $f(x, y, z)$ kan skrivas om som $z = f(x, y)$, givet att alla villkor i satsen uppfylls.

2 Tolkning av dubbelintegraler

I en variabel tolkar vi integraler geometriskt som den tecknade arean mellan grafen och x-axeln. Bestämda integraler är givna i en definitions mängd på x-axeln, alltså två tal $[a, b]$ på x-axeln. Vi skriver det så här: $\int_a^b f(x)dx$. För funktioner av flera variabler kan denna definition utvidgas. En funktion $z = f(x, y)$ beskriver nu en 3-dimensionell funktionsyta i $\mathbf{R}^3$ och definitions mängden D är alltså en tvådimensionell yta i xy-planet. Då tolkas integralen som den tecknade volymen mellan grafen $z = f(x, y)$ och definitions mängden D . Detta kallas dubbelintegral och skrivs så här: $\iint_D f(x, y)dx dy$

3 Fubinis sats

3.1 För rektanglar

Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion och låt Δ vara en rektangel given av: $\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ Då kan dubbelintegralen mellan f och Δ beskrivas med följande formel:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \quad (5)$$

Den formel kan intuitivt tolkas som att vi delar in dubbelintegralen i två enkelintegraler genom att först kolla på skivningen av rektangeln i x-led och sedan skivningen av den i y-led, för att då få ut hela volymen. Men denna tolkning är det högst rimligt att en skivning först i x-led sen y-led ger exakt samma volym som en skivning först i y-led sen x-led, vilket innebär att ordningen av enkelintegralerna inte spelar någon roll.

3.2 För ett reguljärt område (Sats 6.2.4)

Låt $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner av x så att $\alpha(x) \leq \beta(x)$ på intervallet $x \in [a, b]$.

Om $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion gäller

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy. \quad (6)$$

Detta skulle intuitivt kunna ses som att man stänger in ett område D med hjälp av funktionerna $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ samt värdena a och b . Denna funktion $f(x, y)$ integreras sedan över området.

I och med att området är reguljärt kommer dubbelintegralen, till skillnad från rektangulära områden, att få olika integrationsgränser beroende på vilken variabel vi först integrerar med avseende på.

4 Variabelbyte för dubbelintegraler

Låt $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$ vara en bijektiv C^1 -avbildning. Då gäller:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Förutsatt att Jacobis determinant $J(u, v) \neq 0$ som beräknas enligt:

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Om determinanten är noll innebär det att avbildningen ej är bijektiv och att variabelbytet inte är genomförbart, då hela högerledet i detta fall blir noll. Absolutbeloppet av $|J(u, v)|$ kan då tolkas som förstoringen av arean för varje avbildning från varje litet delområde i D till E .

För att variabelbytet ska fungera måste alltså avbildningen vara bijektiv över ett begränsat öppet intervall som är kvadrerbart över ett område E i uv -planet på motsvarande område D i xy -planet.

5 Beräkna dubbelintegraler med hjälp av nivåkurvor

För att kunna beräkna dubbelintegraler finns det olika metoder. Ett tillvägagångssätt är att använda nivåkurvor. De integraler man kan använda den givna metoden på kan skrivas som

$$I = \iint_D h(g(x, y)) dx dy \quad (7)$$

Metoden beskrivs i satsen nedan.

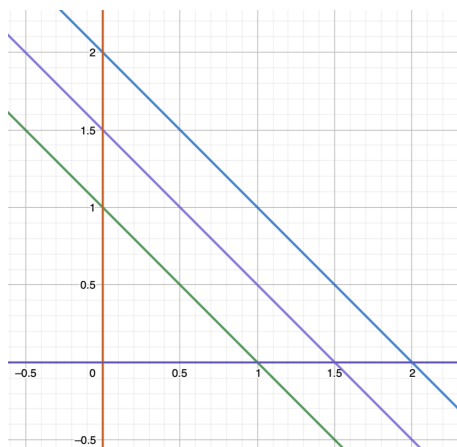
5.1 Sats

Låt $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig c^1 -funktion av endast en variabel och låt $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vara en c^0 -funktion. $D \subseteq \mathbf{R}^2$ är ett område i xy -planet som är kvadrerbart. En avgörande egenskap för att denna metod skall fungera är att integranden på nivåkurvorna till g är konstant.

Antag att det finns $a \leq g(x, y) \leq b, \forall (x, y) \in D$ och låt dessa bli integrationsgränser för den nya integralen. Sätt $A(u) = \text{Area}\{(x, y) \in D | g(x, y) \leq u\}$. Då gäller, enligt Fubinis sats, att man kan göra omskrivningen nedan.

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du \quad (8)$$

En tolkning av omskrivningen av integralen är att $h(u)$ är höjden på den volym som beräknas och $A'(u)$ är förändringshastigheten av arean till volymen. Detta kan visas grafiskt, se figur nedan.



Figur 1: Området mellan den lila linjen som beror av u och den gröna linjen representerar $A(u)$ och $A'(u)$ beskriver hur denna arean förändras då u förändras.

6 Generaliserade dubbelintegraler

Hittills vet vi endast hur vi ska integrera dubbelintegraler över begränsade funktioner och områden. Detta inskränker användningsområdet för dubbelintegraler och det är därför även nödvändigt att se på dubbelintegraler med obegränsade områden samt funktioner. Man bör då även undersöka konvergens och divergens för integralerna, eftersom vi nu kollar på generaliserade integraler. Det finns två olika typer av generaliserade dubbelintegraler:

- 1) De med obegränsad funktion.
- 2) De med obegränsat område.

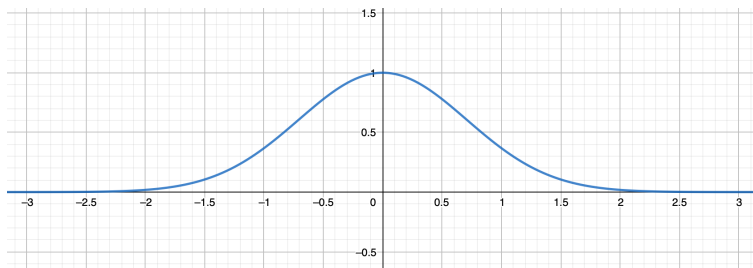
Dessa beräknas på liknande sätt som för integraler med en variabel.

7 Gauss sats

En av Gauss satser beskriver Gauss-integralen som är integralen av Gauss-funktionen e^{-x^2} över de reella talen. Integralen är

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \quad (9)$$

Denna integral kan redovisas grafiskt enligt figur nedan.



Figur 2: Areal mellan grafen och x-axeln är $\sqrt{\pi}$ areaenheter

7.1 Bevis av sats

Låt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow I^2 = \pi \quad \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$$

8 Teori för trappfunktioner och dubbelintegraler

8.1 Definition 0.1

Låt $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ så att $a \leq c, b \leq d$.

Mängden $\Delta \subseteq \mathbf{R}^2$ ges av $\Delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\}$ kallas för en sluten axelparallell rektangel. Dvs en rektangel med hörn i (a, b) , (c, b) , (c, d) , (a, d) där sidorna av rektangeln är parallella med koordinataxlarna.

8.2 Definition 0.2

Givet $a \leq b$ kallar vi en ändlig sekvens av det slutna intervallet $[a, b]$ en partition.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Detta behövs för att både multiplikationen av mängderna och formeln för delrektanglarna skall fungera.

8.3 Definition 1

Givet en axelparallell rektangel $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ och partitioner:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = c,$$

$$b = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d.$$

Funktionen $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ kallas för en trappfunktion om Φ har ett konstant värde på varje delrektangel. $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$

Dubbelintegralen av Φ definieras som:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) C_{ij}$$

där C_{ij} är Φ 's konstanta värde på rutan $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$.

Det som fås av dubbelsumman är alltså volymen av alla delrektanglar summerade.

8.4 Definition 2

Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ en funktion. Funktionen f sägas vara integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ på Δ sådana att:

- 1) $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta.$
- 2) $\iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy < \epsilon.$

Notera att om f är integrerbar över Δ så är:

$$\limsup_{\Phi \leq f} \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \liminf_{f \leq \Psi} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy,$$

per definition:

$$= \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$

9 Sats 6.1.3

Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ en kontinuerlig funktion. Då gäller att:

- 1) f är integrerbar över Δ .
- 2) $\iint_{\Delta} = \int_b^d dy \int_a^c f(x, y) dx = \int_a^c dx \int_b^d f(x, y) dy.$

Satsen bevisar den del av Fubinis sats som bygger på att Δ är ett rektangulärt område. För att bevisa 1 behöver man visa att det finns två trappfunktioner

(ty integrerbarhetens definition) Φ och Ψ så att olikheterna $\Psi(x, y) \geq f(x, y) \geq \Phi(x, y)$ och $\iint_{\Delta} \Phi(x, y) - \iint_{\Delta} \Psi(x, y) < \epsilon$ ($\forall (x, y) \in \Delta$) uppfylls. Detta bevisas genom att funktionen är likformigt kontinuerlig (ty f är kontinuerlig och Δ är en kompakt mängd).

För att bevisa nummer 2 behöver man bevisa existensen av de bestämda integralerna och detta görs genom ett epsilon-delta bevis. Därefter bevisas att de bestämda integralerna för trappfunktionerna är detsamma som dess integraler över mängden. Sedan kan själva beviset göras och i slutet stängs $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$ in med de två trappfunktioner. Den undre begränsningen ser ut som följande,

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \int_b^d dy \int_a^c \Phi(x, y) dx \leq \int_b^d dy \int_a^c f(x, y) dx$$

medan den övre,

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy = \int_b^d dy \int_a^c \Psi(x, y) dx \geq \int_b^d dy \int_a^c f(x, y) dx.$$

När partitionerna av Δ mängdens antal termer går mot oändligheten kommer denna instängning leda till att integralen av Ψ och Φ närmar sig samma värde, vilket innebär att f 's integral även gör det och beviset är därmed klart.