

Sammanfattning LV3

August Kälvesten, Isak Nilsson, Lotta Eriksson, Ludwig Gustafsson,
Miriam Ulenius, Sara Dädeby

1 Föreläsning 1

Under första lektionen i veckan diskuterades implicit derivering, vilket är ett sätt att derivera en implicit funktion i en omgivning av en viss punkt på grafen.

1.1 Implicita funktionssatsen

Låt $F(x,y)$ vara en C^1 – funktion och (a,b) en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = c$. Om $F_y(a,b) \neq 0$ finns det en omgivning av (a,b) s.a. restriktionen av nivåkurvan till u implicit definierar en C^1 – funktion $y = f(x)$. För derivatan gäller

$$f'(x) = \frac{-F_x(a, f(x))}{F_y(a, f(x))}. \quad (1)$$

Satsen kan förstås som att så länge lutningen av nivåkurvan inte är vertikal så kan en sektion av den beskrivas som en explicit funktion, och därmed deriveras.

1.2 Utvidgning av implicita funktionssatsen

Ovan givna satsen gäller för 2 variabler, dock går det att utvidga satsen för att gälla för godtyckligt antal variabler. Den utvidgade implicita funktionssatsen lyder:

Låt $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vara en C^1 – funktion och $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ en punkt på nivåytan $F(\mathbf{x}) = c$. Om $F_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ finns det en omgivning av $(\mathbf{a})$ s.a. restriktionen av nivåytan till u implicit definierar en C^1 – funktion $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. För derivatan gäller

$$\frac{\delta f}{\delta x_i} = \frac{-F_{x_i}}{F_{x_n}}. \quad (2)$$

2 Föreläsning 2

Under veckans andra föreläsning introducerades vi till dubbelintegraler, det vill säga integraler av funktioner av två variabler, vilket därefter behandlas djupare under veckans resterande föreläsningar.

DUBBELINTEGRALER

En dubbelintegral kan också beskrivas som en itererad (upprepad) integral av en funktion av två variabler. För att ge en "geometrisk" tolkning av dubbelintegraler kan det uttryckas såhär:

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, en begränsad mängd i xy-planet och $z=f(x,y)$.

Då beskrivs dubbelintegralen av funktionen $f(x,y)$ som,

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = V \quad (3)$$

där $dx \, dy$ betecknar *arean* i xy-planet, $f(x,y)$ *höjden* i z-led och V är den tecknade *volymen* mellan arean D i xy-planet och funktionen $z=f(x,y)$.

FUBINIS SATS, DEL 1

Därefter gick vi in på vad Fubinis sats säger, först med avseende på en rektangel.

Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion och Δ vara en rektangel, definierad som

$$\Delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (4)$$

Då skrivs dubbelintegralen av $f(x,y)$ över området Δ ,

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (5)$$

där $f(x, y)$ först integreras över området i x-led, därefter i y-led. Detsamma gäller omvänt, genom att först integrera i y-led och därefter i x-led.

FUBINIS SATS, DEL 2

Vidare gick vi in på ”Fubinis sats 2.0”, det vill säga sats 6.2.4 i kurslitteraturen (Persson-Böiers). Vi låter $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion och området Δ i xy-planet, definieras som

$$\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad (6)$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner av x, så att $\alpha(x) \leq \beta(x)$ $\forall x \in [a, b]$.

Då skrivs dubbelintegralen av $f(x, y)$ över området Δ ,

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (7)$$

där $f(x, y)$ först integreras över området i y-led, därefter i x-led. Detsamma gäller omvänt, genom att först integrera i y-led och därefter i x-led. Området i xy-planet stängs alltså in mellan två funktioner beroende av x, och ett givet oberoende intervall i x-led. Mängden Δ sägs vara *reguljärt* i x-led.

2.1 Variabelbyten i dubbelintegraler

2.1.1 Introduktion/definition

Nästa del som behandlats under läsvecka 3 är variabelbyten, där fokus har legat på variabelbyten i dubbelintegraler. Vi betraktar variabelbyten som

följande:

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) := (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Tanken med ovan är att vi byter variabler från $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ till $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

För att variabelbytet skall vara tillåtet krävs det att $\mathbf{F}$ är injektiva.

2.1.2 SATS 6.4.6

Mer generella variabelbyten talar vi om i sats 6.4.6, vilken säger följande:

Låt variabelbytet $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$ vara en bijektiv C^1 avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet sådan att :

$$J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

där $J(u, v)$ anger determinanten av funktionalmatrisen. Funktionalmatrisen kallas även för Jacobimatrisen. Då gäller:

$$\iint_D (x, y) dx dy = \iint_E (g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

Viktigt är även att förklara varför $dx dy = |J(u, v)| du dv$. Från kedjeregeln får vi följande samband:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Från linjär algebra vet vi att vid en avbildning $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ så anger beloppet av determinanten, av avbildningsmatrisen A förändringen i area, i vårt

fall är avbildningsmatrisen funktionalmatrisen och dess determinant funktionaldeterminanten. Faktorn $|J(u, v)|$ anger således skillnaden av arean av integrationsområden vid variabelbytet.

2.1.3 Viktigt exempel

Det viktigaste exemplet som gått igenom är bytet mellan kartesiska och polära koordinater i planet, $(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$. Variabelbytet ges då enligt följande: $x = r \cos(\theta)$ och $y = r \sin(\theta)$. I detta variabelbyte ges funktionalmatrisen av följande:

$$J(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

och således erhålles att $|J(r, \theta)| = r$. Förändringsfaktorn för area blir således r vid variabelbyten från kartesiska till polära koordinater.

2.2 Dubbelintegraler med nivååtor

Under det tredje föreläsningstillfället diskuterades en metod för lösning av integraler på formen

$$I = \iint_D h(g(x, y)) dx dy, \quad (8)$$

där $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig C^2 funktion och $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ antas vara C^1 . $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en kvadrerbar mängd. Låt $a \leq g(x, y) \leq b$, $\forall (x, y) \in D$. Låt $A(u)$ beteckna arean av mängden $\{(x, y) \in D \mid g(x, y) \leq u\}$. En annan förutsättning är att integranden h är konstant på nivåytorna till g . Om alla dessa krav är uppfyllda gäller att

$$I = \int_a^b h(u) A'(u) du. \quad (9)$$

Dubbelintegralen har alltså reducerats till en enkelintegral som kan lösas enklare än den ursprungliga integralen.

2.3 Generaliserade dubbelintegraler, två fall

På samma sätt som man i envariabelanalysen kan integrera funktioner över obegränsade intervall, eller om funktionsvärdet är obegränsat i vissa punkter, och ändå få en ändlig area som resultat är detta också möjligt för funktioner av två variabler, där resultatet istället är en ändlig volym.

2.4 Gauss sats

Ett viktigt exempel på när konvergenta integraler av flera variabler kan vara användbara är för att hitta en relativt enkel lösning på integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (10)$$

Denna integral är integralen över normalfördelningskurvan, som är mycket betydelsefull inom exempelvis sannolikhetsteori såväl som en mängd olika andra vetenskaper. Gauss sats säger att $I = \sqrt{\pi}$, beviset för detta involverar analys av konvergenta integraler med avseende på två integraler och lyder:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \Rightarrow I^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy, \\ \Rightarrow I^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \Rightarrow I = \sqrt{\pi} \quad (11) \end{aligned}$$

2.5 Definition axelparallell rektangel

Antag:

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, så att $a \leq c$ och $b \leq d$.

Då gäller:

Mängden $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ given av: $\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\}$ kallas för en slutna axelparallell rektangel.

Skrivs: $\Delta = [a, c] \times [b, d]$.

2.6 Definition partition

Antag:

$a, c \in \mathbb{R}$, så att $a \leq c$.

Då gäller:

En partition av det slutna intervallet $[a, c]$ är en ändlig sekvens så att

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$$

2.7 Definition trappfunktion

Antag:

$$\Delta = [a, c] \times [b, d]$$

$\exists$ partition i $[a, c]$

$\exists$ partition i $[b, d]$

Då gäller:

En funktion $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för en trappstegsfunktion och ϕ har ett konstant värde för varje delrektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

2.7.1 Definition av dubbelintegral av trappstegsfunktioner

Dubbelintegralen av ϕ definieras som:

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot c_{ij} \quad (12)$$

där c_{ij} är det konstanta värdet som ϕ antar på varje delrektangel

$$[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$$

2.8 Definition integrerbarhet

Antag:

$$\Delta = [a, c] \times [b, d]$$

$$f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

Då gäller:

f sägs vara integrerbar över Δ om det $\forall \varepsilon > 0$ finns trappstegsfunktioner ϕ och Ψ på Δ så att:

$$\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta \quad (13)$$

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\Delta} \phi(x, y) \, dx \, dy < \varepsilon. \quad (14)$$

Dubbelintegralen $\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy$ definieras då som:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \limsup_{\phi \leq f} \iint_{\Delta} \phi(x, y) \, dx \, dy = \liminf_{\Psi \geq f} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx \, dy \quad (15)$$

2.9 SATS 6.1.3

Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då gäller att

(i) f är integrerbar över Δ

$$(ii) \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^c \left(\int_b^d f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_b^d \left(\int_a^c f(x, y) \, dx \right) \, dy$$

I beviset av (i) vill vi alltså visa att det finns trappfunktioner $\phi, \Psi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller definitionen av integrerbarhet. För att visa detta används att f är likformigt kontinuerlig, ty f är kontinuerlig och Δ kompakt. Partitioner väljs sedan så att diametern av varje ruta är $< \delta$. Låt sedan trappfunktionerna Ψ och ϕ anta största respektive minsta värdet på varje delruta och betrakta differensen mellan dem.