Tavelpresentation v.5 MVE035

Mikail Yenigün
Kalle-Ludvig Wetterlund
Cyrus Tatari
Faisal Kohestani
Elof Schelén
Filip Melberg

2 mars 2020

Innehåll

1 Sats 6.1.3 **3**

2 Integration över allmäna områden **3**
2.1 Allmän definition (s.241) . . . 3
2.2 Nollmängder . . . 3
2.3 Definition av kvadrerbarhet . . . 3
2.4 Lemma 6.2.2 . . . 3
2.5 Lemma 6.2.1 & Sats 6.2.4 . . . 3

3 Integraler i högre dimensioner **4**
3.1 Trippelintegraler . . . 4
3.2 Användningsområden . . . 4
3.3 Koordinatbyten (generalisering av Sats 6.4.6) . . . 4
3.3.1 Två viktigaste exemplen: . . . 5
3.4 Volymberäkningar i $\mathbb{R}^3$ . . . 5
3.5 Sats: Volym av enhetsklotet i $\mathbb{R}^n$ . . . 5
3.5.1 Bevis . . . 6
3.6 Volym av enhetstetraedern i $\mathbb{R}^n$ . . . 6

4 Kurvor **6**
4.1 Definition . . . 6
4.1.1 Två observationer . . . 7
4.1.2 Fysikalisk tolkning . . . 7
4.1.3 Definition . . . 7
4.1.4 Kurvlängd . . . 7
4.2 Vektorfält och Kurvintegraler . . . 7
4.2.1 Definition 1 . . . 7
4.2.2 Definition 2 . . . 7
4.2.3 Definition 3 . . . 7
4.2.4 Fysikalisk tolkning, anmärkning och notationer . . . 8
4.2.5 Beräkningar . . . 8
4.3 Centralrörelse . . . 8
4.4 Ufört arbete under fritt fall. . . . 9
4.5 Ytor . . . 9
4.5.1 Definition . . . 9
4.5.2 Exempel 1 . . . 9
4.5.3 Exempel 2 . . . 10
4.5.4 Area av en parametriserad yta . . . 10

1 Sats 6.1.3

Varje kontinuerlig funktion är integrerbar över en axelparallell rektangel och Fubinis sats gäller.

2 Integration över allmäna områden

2.1 Allmän definition (s.241)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd. För en övermängd $D^* \supseteq D$ och en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ så kan nollutvidgningen av f till D^* definieras som funktionen $f^* : D^* \to \mathbb{R}$ så att:

$$f^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \text{om } \boldsymbol{x} \in D \\ 0, & \text{om } \boldsymbol{x} \in D^* \setminus D \end{cases}$$

Då sägs f vara integrerbar på D om det finns en axelparallel rektangel $\Delta \supseteq D$ så att nollutvidgningen av f till Δ är integrerbar över Δ.

2.2 Nollmängder

En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara en nollmängd om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ändligt många axelparallella rektanglar $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ så att:

$$(i) \ \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \supseteq D$$

$$(ii) \ \sum_{i=1}^{n} Area(\Delta_i) < \varepsilon$$

2.3 Definition av kvadrerbarhet

En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara kvadrerbar om dess rand ∂D är en nollmängd.
En nollmängd i $\mathbb{R}^2$ är en mängd utan area, så en kvadrerbar mängd är en mängd vars rand inte har någon area.

2.4 Lemma 6.2.2

Om D är en begränsad, kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^2$ och f är en kontinuerlig funktion av två variabler så är f integrerbar över D.

2.5 Lemma 6.2.1 & Sats 6.2.4

Låt $D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}$ där α, β är kontinuerliga funktioner.

Då gäller:

(1) D är en kvadrerbar mängd.
(2) Om f är kontinuerlig så är f integrerbar över D och Fubinis sats gäller, dvs

$$\iint\limits_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\ dy\,.$$

3 Integraler i högre dimensioner

3.1 Trippelintegraler

$\iiint\limits_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ kan tolkas som en tecknad volym i $\mathbb{R}^4$.

3.2 Användningsområden

Volymberäkningar i $\mathbb{R}^3$. Sätt $f = 1$. Om $D \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\Longrightarrow\ vol(D) = \iiint\limits_D dx\ dy\ dz\,.$$

Om man kan visa att området D kan begränsas av två funktionsgrafer $D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ och } f(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\}$ så kan trippelintegralen reduceras till en dubbelintegral:

$$\iiint\limits_D dx\ dy\ dz = \iint\limits_E dx\ dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz = \iint\limits_E [\ g(x,y) - f(x,y)]\ \ dx\ dy\,,$$

där E är projektionen av D på xy-planet ($E = \Pi(D)$).

3.3 Koordinatbyten (generalisering av Sats 6.4.6)

Ändra x, y och z till följande:

$x = g(u,v,w),\ y = h(u,v,w),\ z = k(u,v,w)$

$$\Longrightarrow \iiint\limits_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_E f(g(u,v,w), h(u,v,w),\ k(u,v,w))||J(u,v,w)||\ du\ dv\ dw\ ,$$

där $J(u,v,w) = det\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$,

och E är inversbilden av D under transformationen $x = g(u,v,w),\ y = h(u,v,w),\ k = (u,v,w)$.

3.3.1 Två viktigaste exemplen:

Bytet från Cartesiska koordinater till cylindriska eller sfäriska.

Bytet från Cartesiska till cylindriska sker på följande sätt:
Sätt $x = r\ cos(\theta),\ y = r\ sin(\theta)$ och behåll z-koordinaten $z = z$. Då fås

$$dx\ dy\ dz = \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\| dr\ d\theta\ dz = r\ dr\ d\theta\ dz \quad \Longrightarrow\ vol(D) = \iiint\limits_E r\ dr\ d\theta\ dz\ .$$

Bytet från Cartesiska till sfäriska sker på följande sätt:

$$\begin{aligned} &\text{Sätt } x = \rho\, sin(\theta)\, cos(\phi),\ y = \rho\, sin(\theta)\, sin(\phi) \text{ och } z = \rho\, cos(\theta). \\ &\Longrightarrow\ dx\ dy\ dz = \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} \right\| d\rho\ d\theta\ d\phi \\ &\Longrightarrow\ dx\ dy\ dz = \rho^2 sin(\theta)\ d\rho\ d\theta\ d\phi\ . \end{aligned}$$

3.4 Volymberäkningar i $\mathbb{R}^3$

<u>Def 1:</u> Antag att en kropp ockuperar ett område K i rummet och som har varierande densitet $\rho(x,y,z)$. Kroppens totala massa blir då:

$$m = \iiint_K \rho(x,y,z) dx\ dy\ dz\ .$$

<u>Def 2:</u> Masscentrumet av kroppen i Def.1 är:

$$\overline{\mathrm{m}} = (m_x, m_y, m_z),\ \text{där } m_x = \frac{\iiint_K x\rho(x,y,z) dx\ dy\ dz}{\iiint_K \rho(x,y,z) dx\ dy\ dz},$$

och samma för m_y och m_z genom att sätta integralen i täljaren med avseende på $y\rho(x,y,z)$ och $z\rho(x,y,z)$.
Det kan också beskrivas som att masscentrumet är medelvärdet av massans position.

<u>Def 3:</u> Låt $f(x,y,x)$ vara en integrerbar funktion av tre variabler och låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat och kvadrerbart område. Medelvärdet av f på K ges då av:

$$\overline{\mathrm{f_K}} = \frac{\iiint_K f(x,y,z) dx\ dy\ dz}{\iiint_K dx\ dy\ dz}\ .$$

3.5 Sats: Volym av enhetsklotet i $\mathbb{R}^n$

Låt B_n vara enhetsklotet i $\mathbb{R}^n$ dvs. $\{\boldsymbol{x}\ \in \mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x}|| \leq 1\}$ och låt $\mu(B_n)$ vara dess volym. Då gäller:

$$\mu(B_1) = 2\,, \qquad \mu(B_2) = \pi\,, \qquad \mu(B_n) = \frac{2\pi}{n}\ \mu(B_{n-2}),\ \forall\ n\ \geq 3.$$

3.5.1 Bevis

Antag att $\mu(B_1) = 2$, $\mu(B_2) = \pi$. Låt nu $n \geqslant 3$, notera först att

$$\boldsymbol{x} \in B_n \iff ||\boldsymbol{x}|| \leq 1 \iff ||\boldsymbol{x}||^2 \leq 1$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i{}^2 \leq 1 \iff \boldsymbol{x}_{n-1}^2 + \boldsymbol{x}_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \boldsymbol{x}_i{}^2 ...(*)$$

$$\mu(B_n) = \int_{B-n} ... \int dx_1 ... dx_n$$

enligt Fubinis Sats och (*)

$$\implies \pi \int_{B_{n-2}} ... \int (1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2) dx_1 ... dx_{n-2}$$

Låt nu

$$g(x_1 ... x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}, \quad h(u) = 1 - u^2$$

Notera att $B_{n-2} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 0 \leqslant g \leqslant 1\}$. Integralen blir då

$$\int_0^1 h(u) \cdot V'(u) du, \text{ där } V(u) = vol\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 0 \leq g \leq u\}$$

$$= \text{ volymen av en } (n-2)\text{-dimensionell boll av radie } u \ = \mu_{n-2} \cdot u^{n-3}$$

$$\implies \mu_n = \pi \int_0^1 (1 - u^2)(n-2)\mu_{n-2} \cdot u^{n-3} du = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu_{n-2}. \text{ Vilket skulle visas.}$$

3.6 Volym av enhetstetraedern i $\mathbb{R}^n$

<u>Def:</u> Den n-dimensionella enhetstetraedern T_n ges av

$$T_n = \{(x_1, ..., \ x_n) \mid x_i \geq 0 \ \forall i, \ x_1 + x_2 + ... + x_n \leqslant 1\} \ .$$

<u>Sats:</u>

$$vol(T) = \iint_{T_n} ... \int dx_1 \ dx_2 ... dx_n = \frac{1}{n!}.$$

4 Kurvor

4.1 Definition

Låt $n \in \mathbb{N}$ och $a < b$ reella tal. En kontinuerlig funktion $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad och orienterad kurva i $\mathbb{R}^n$.

4.1.1 Två observationer

(i) Ett orienteringsbyte utförs genom att byta ut parametriseringern $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mot $\boldsymbol{s} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ där,

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{r}(b + a - t) \text{ och}$$
$$\boldsymbol{s}(a) = \boldsymbol{r}(b) \ , \ \boldsymbol{s}(b) = \boldsymbol{r}(a)$$

(ii) En och samma kurva med samma orientering kan parametriseras på oändligt många sätt.

4.1.2 Fysikalisk tolkning

En parametriserad och orienterad kurva $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^{n=(3)}$ är en partikel som rör sig mellan tiderna $t = a$ och $t = b$ mellan startpunkten $\boldsymbol{r}(a)$ och slutpunkten $\boldsymbol{r}(b)$, längs med kurvan $\gamma = \boldsymbol{r}([a, b])$.

Givet en parametriserad C^2-kurva $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ och $t \in [a, b]$.

4.1.3 Definition

Hastigheten, farten och accelerationen vid tiden t är $\boldsymbol{r}'(t)$, $||\boldsymbol{r}'(t)||$ respektive $\boldsymbol{r}''(t)$.

4.1.4 Kurvlängd

Kurvans längd ges av integralen: $\int\limits_a^b ||\boldsymbol{r'}(t)||dt$

Kurvlängden för en funktionskurva $y = f(x)$ i planet: $\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)} \ dx$

4.2 Vektorfält och Kurvintegraler

4.2.1 Definition 1

Låt $n \in \mathbb{N}$. En (vektorvärd) funktion $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för ett n-dimensionellt vektorfält.

4.2.2 Definition 2

En funktion av n variabler, dvs en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kallas för ett n-dimensionellt skalärfält.

4.2.3 Definition 3

Låt $n \in \mathbb{N}$ och låt $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t) \mid a \leqslant t \leqslant b\}$ vara en C^1-kurva i $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett C^0-vektorfält.

Då defineras kurvintegralen av vektorfältet $\mathbb{F}$ längs kurvan γ enligt

$$\int_a^b \mathbb{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) dt \ .$$

4.2.4 Fysikalisk tolkning, anmärkning och notationer

Fysikalisk tolkning:
Antag att $\mathbb{F}$ är en kraftfält. Då är Kurvintegralen = Det arbete som utförs vid förflyttning av en partikel längs kurvan.
Anmärkning:
Integralvärdet blir samma oavsett valet av parametriseringen (Detta kan bevisas med hjälp av kedjeregeln).
Bevis av anmärkning:
Sätt $t = \varphi(u)$, där φ är en C^1-funktion på ett intervall $[a, b]$ med $\varphi(a) = \alpha$ och $\varphi(b) = \beta$ parametriseringen blir då:

$$u \mapsto \boldsymbol{r}(\phi(u)), \quad \alpha \leqslant u \leqslant \beta.$$

Med denna parametrisering blir då kurvintegralen:

$$\begin{aligned}
&\int_{u=\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))) \cdot \frac{d}{du}\boldsymbol{r}(\varphi(u))\ du = \{\text{kedjeregeln}\} \\
&= \int_{u=\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))) \cdot \boldsymbol{r}'(\varphi(u))\varphi'(u)\ du = [\varphi(u) = t,\ \varphi'(u)\ du = dt] \\
&= \int_{t=a}^{b} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\ dt. \text{ Vilket skulle visas.}
\end{aligned}$$

Notationer:

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \text{ där } \gamma \text{ är en orienterad kurva.}$$

4.2.5 Beräkningar

Hitta en explicit parametrisering av varje stycke och intigrera över dessa separat och addera ihop svaren.

4.3 Centralrörelse

Vinkelmomentet ges av: $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{r}'(t) = m(\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r'}(t)$.

Keplers lag: Om en partickel utför en centralrörelse så är vinkelmomentet konstant.

Bevis:
$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)) = \{Produktregeln\} = \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}''(t) = 0$

$\implies \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) = konstant$

ty en vektor kryssad med sig själv, samt kryssprodukten av två antiparallella vekoter, är alltid 0.

4.4 Ufört arbete under fritt fall.

$\mathbb{F}$ = summan av alla krafter i universumet som verkar på partikeln
$\implies$ Newtons andra lag gäller $\implies \mathbb{F} = m\,\boldsymbol{r}''$
$\implies$ Utfört arberte $= \int\limits_a^b m\,\boldsymbol{r}''(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt.$
Lemma: Låt $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ vara C^1-kurvor då gäller:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{u}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}'(t)$$

$$\implies \text{Utfört arbete } = \int_a^b m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\ dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\|\boldsymbol{r}'(t)\|^2\ dt$$

$$= \frac{m}{2}(\|\boldsymbol{r}'(b)\|^2 - \|\boldsymbol{r}'(a)\|^2) = \text{ förändring i kinetisk energi.}$$

4.5 Ytor

4.5.1 Definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat, kvadrerbart område. En C^1-funktion $\boldsymbol{r} : D \to \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad C^1-yta i $\mathbb{R}^n$.

Vi kommer fortsättningsvis fokusera på ytor i $\mathbb{R}^3$.

4.5.2 Exempel 1

En del av en funktionsyta:
C^1-funktion $f(x, y)$ av två variabler så att $z = f(x, y)$.
Naturlig parametrisering blir:

$$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))\ .$$

4.5.3 Exempel 2

Parametrisering av en sfär med radie a kring origo utförs mest naturligt med sfäriska koordinater. Dvs:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r} : [\ 0, 2\pi] \ \times [\ 0, 2\pi] \ \to \mathbb{R}^3 \\
&(\theta, \phi) \mapsto (a\, sin\theta\, cos\phi,\ a\, sin\theta\, sin\phi,\ a\, cos\theta).
\end{aligned}$$

4.5.4 Area av en parametriserad yta

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r} : D \to \mathbb{R}^3 \\
&(s,t) \mapsto \boldsymbol{r}(s,t) = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)) \\
&\boldsymbol{r}(s+ds,\ t) = \boldsymbol{r}(s,\ t) + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,\ t)ds \\
&\implies \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,\ t)ds, \\
&\boldsymbol{r}(s,\ t+dt) = \boldsymbol{r}(s,\ t) + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,\ t)dt \\
&\implies \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,\ t)dt.
\end{aligned}$$

Infinitesmala arean $= dS = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right\| ds\ dt$. Ytarean blir då:

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right\| ds\ dt.$$

Arean av en funktionsyta kan därmed bestämmas:
$\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$\implies \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (-f_x, f_y, 1)$

$\implies \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

$$\text{Ytarea} = \iint_D \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\ \ dxdy$$