

Sammanfattning av föreläsningar under läsvecka 4 och 5 i MVE035

Rasmus Olausson, Anton Rosén, Simon Edman,
Arvid Sörfeldt, Filip Herbertsson, Ella Larsson

Februari 2020

1 Introduktion

Det här är en sammanfattning av föreläsningarna under läsvecka 4 och 5 i kursen flervariabelanalys. Läsvecka 4 bestod av multipelintegraler och hur man med hjälp av dessa kan beräkna volymer. Vi pratade även om några tillämpningar inom mekanik. Läsvecka 5 handlade främst om parametrisering av kurvor och ytor men sista föreläsningen handlade om kurvintegraler.

2 Integration över godtyckliga områden

Läsvecka 4 började med lite rester från läsvecka 3. Nämligen dubbelintegration över mer godtyckliga områden än axelparallella rektanglar. Först gjorde vi en utvidgning av integrerbarhetsbegreppet.

Definition 1. Låt $f(x, y)$ vara en begränsad funktion på en begränsad mängd D och inför den utvidgade funktionen

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{när } (x, y) \in D \\ 0 & \text{när } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Vi säger att f är integrerbar över D om f_D är integrerbar över någon axelparallell rektangel Δ som omfattar D , och vi sätter då

$$\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f_D \, dx \, dy.$$

Eftersom f_D är noll utanför D är definitionen oberoende av valet av den omgivande rektangeln Δ .

Vidare fortsatte vi med att definiera begreppen kvadrerbar mängd och nollmängd.

Definition 2. En mängd N i planet kallas en nollmängd om vi för varje tal $\varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ε .

Definition 3. En mängd D kallas kvadrerbar om dess rand är en nollmängd.

Från dessa definitioner formulerade vi även följande satser.

Sats 1. Om D är en begränsad kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^2$ och f är en kontinuerlig funktion av två variabler så är f integrerbar över D .

Sats 2. Låt

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \},$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner så att $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in [a, b]$. Då gäller:

- (i) D är en kvadrerbar mängd
- (ii) Om f är kontinuerlig så är f integrerbar över D och Fubinis sats gäller, dvs

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

3 Multipelintegraler

Multipelintegralen

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

av en funktion av n variabler över ett område $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kan tolkas som en tecknad volym i $\mathbb{R}^{n+1}$. Vi börjar med att behandla integration av funktioner där $n = 3$, så kallade trippelintegraler. Från tre variabler är det sedan lätt att generalisera till $n > 3$.

Det finns två huvudsakliga metoder för att beräkna trippelintegraler. Den första är genom att genomföra itererad integration. Om man kan visa att området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ begränsas av två funktionsytor så att

$$D = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \},$$

där E är projektionen av D på xy -planet, kan integralen reduceras till en dubbelintegral genom

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left(\int_{z=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Den återstående dubbelintegralen kan nu beräknas som vanligt.

Den andra metoden för att beräkna trippelintegraler är genom att genomföra ett variabelbyte. Det finns här en allmän sats som generaliserar variabelbyten i dubbelintegraler (Sats 6.4.6 i PB) till högre dimensioner. I fallet $n = 3$ fås då följande sats.

Sats 3. Låt

$$\begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases}$$

vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uvw -rummet på ett motsvarande område D i xyz -rummet, sådan att $J = J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \neq 0$ i E . Då är

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J| du dv dw$$

om funktionerna under integraltecknen är integrerbara över respektive område.

De två viktigaste exemplen på variabelbyten är bytet från Cartesiska koordinater till cylindriska respektive sfäriska koordinater. Cylindriska koordinater fås genom variabelbytet

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z, \end{cases}$$

där $|J| = r$, och sfäriska koordinater fås genom

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

där $|J| = r^2 \sin \theta$.

4 Volymberäkningar

Volymen av ett kvadrerbart område $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beräknas genom

$$Vol(K) = \int \cdots \int_K dx_1 \dots dx_n$$

4.1 Volymen av det n -dimensionella enhetsklotet

Volymen $\mu(B_n)$ av det n -dimensionella enhetsklotet B_n i $\mathbb{R}^n$ ges av rekursionsformeln

$$\begin{cases} \mu(B_1) = 2 \\ \mu(B_2) = \pi \\ \mu(B_n) = \frac{2\pi}{n} \mu(B_{n-2}), \quad n = 3, 4, \dots \end{cases}.$$

Detta fås genom att först kolla på integraler av formen $\int_D h(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x}$, där h är en funktion i en variabel och D är området mellan två n -dimensionella

sfärer med centrum i origo, där den mindre sfären har radien a och den större b . Tillämpning av nivåötor ger

$$\int_D h(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = \int_a^b h(r) V'(r) dr, \quad (1)$$

där $V(r)$ är volymen av det n -dimensionella klotet med radien r . Variabelbytet $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$, med funktionaldeterminanten r^n , ger

$$V(r) = \int_{\|\mathbf{x}\| \leq r} d\mathbf{x} = \int_{\|\mathbf{y}\| \leq 1} r^n d\mathbf{y} = r^n \mu(B_n),$$

är $\mu(B_n)$ är volymen av det n -dimensionella enhetsklotet.

Enhetsklotet kan uttryckas $B_n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1$. För en och två dimensioner gäller $\mu(B_1) = 2$ (intervallet $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$) och $\mu(B_2) = \pi$ (enhetsskivans area). Nu ska volymen $\mu(B_n)$ beräknas genom itererad integration. En inre dubbelintegral med avseende på x_{n-1} och x_n väljs, vars integrationsområde C är en cirkelskiva i $x_{n-1}x_n$ -planet som ges av

$$x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2).$$

Övriga variabler sätts i en yttre multipelintegral med integrationsområdet $x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1$. Detta ger

$$\begin{aligned} \mu(B_n) &= \int_{B_n} d\mathbf{x} = \int \dots \int_{B_{n-2}} \left(\iint_C dx_{n-1} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-2} = \\ &= \int \dots \int_{B_{n-2}} \pi (1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2)) dx_1 \dots dx_{n-2}. \end{aligned}$$

Resultatet i ekvation (1) samt sätt $h(u) = 1 - u^2$ och $V(r) = r^{n-2} \mu(B_{n-2})$ ger nu

$$\mu(B_n) = (n-2) \mu(B_2) \int_0^1 \pi (1 - r^2) r^{n-3} dr = \frac{2\pi}{n} \mu(B_{n-2}),$$

vilket tillsammans med $\mu(B_1) = 2$ och $\mu(B_2) = \pi$ är rekursionsformeln som söks.

5 Mekaniktillämpningar

En viktig användning av multipelintegraler är möjligheten att räkna ut masscentrum. För att kunna göra det krävs det ett antal definitioner för att ge förståelse för samband mellan integralen över en kropp och masscentrum. Av rimliga skäl krävs det en massa för att ge någon betydelse till masscentrum.

Definition 4. Säg att du har en kropp som ockuperar ett område K i rummet och som har varierande densitet $\rho(x, y, z)$. Då är kroppens totala massa

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Masscentrumet kan därefter delas upp i olika fall relativt till varje led (x, y, z) , så att man erhåller medelvärdet av massans position i respektive led.

Definition 5. Masscentrumet för den föregående kroppen är

$$\bar{m} = (m_x, m_y, m_z),$$

där

$$\begin{cases} m_x = \frac{\iiint_K x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz} \\ m_y = \frac{\iiint_K y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz} \\ m_z = \frac{\iiint_K z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz} \end{cases}.$$

Definition 5 menar att masscentrumet är medelvärdet av massans position i respektive led. Mer allmänt definieras medelvärdet av en funktion på ett område K .

Definition 6. Låt $f(x, y, z)$ vara en integrerbar funktion av 3 variabler och $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ett begränsat kvadrerbart område. Då ges medelvärdet av f på K av

$$\bar{f}_K = \frac{\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_K dx dy dz}.$$

6 Parametrisering av kurvor

Definition 7. Låt $n \in \mathbb{N}$ och $a, b \in \mathbb{R}$ där $a < b$. Låt även $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en kontinuerlig funktion av en variabel. Då kallas $\mathbf{r}$ för en parametriserad orienterad kurva i $\mathbb{R}^n$.

Den fysikaliska tolkingen i $\mathbb{R}^3$ av Definition 7 är att en partikel rör sig längs med kurvan under ett visst tidsintervall. Det vill säga mellan $t = a$ och $t = b$ längs kurvan $\mathbf{r}([a, b])$. Det är också viktigt att observera att en enskild orienterad kurva kan parametriseras på oändligt många olika sätt. I den fysikaliska tolkingen motsvarar detta hur fort partikeln rör sig längs kurvan $\mathbf{r}$. Detta motiverar definitionen av följande begrepp.

Definition 8. Hastigheten vid tiden t är $\mathbf{r}'(t)$.

Definition 9. Farten vid tiden t är $\|\mathbf{r}'(t)\|$.

Definition 10. Accelerationen vid tiden t är $\mathbf{r}''(t)$.

En kurva som beskrivs i Definition 7 betecknas ofta med γ . Men det är viktigt att komma ihåg att samma notation även används för kurvor utan en given parametrisering. Dessutom betecknar $-\gamma$ samma kurva fast efter ett orienteringsbyte.

6.1 Kurvlängd

Längden av en parametriserad kurva definieras som

$$L := \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (2)$$

En viktigt följd av att definiera längden enligt ekvation (2) är att kurvans längd är oberoende av $\mathbf{r}$:s parametrisering. Nedan följer en bevissskiss.

Låt $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara två olika C^1 parametriseringar för kurvan γ . Det betyder att det finns en växande C^1 funktion $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ så att

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\phi(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Enligt ekvation (2) blir längden

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}_2'(\phi(t))\| dt.$$

Det kan nu med hjälp av variabelbytet $s = \phi(t)$ och kedjeregeln visas att

$$\int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\| dt = \int_c^d \|\mathbf{r}_2'(s)\| ds.$$

Alltså beror inte längden på parametriseringen vilket är förväntat.

Ett viktigt specialfall av ekvation (2) i två dimensioner är att ifall kurvan γ kan skrivas som en del av funktionskurvan $y = f(x)$ så kan längden L skrivas som

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (3)$$

Ekvation (3) följer från den naturliga parametriseringen av en funktionskurva som i $\mathbb{R}^2$ ges av

$$\mathbf{r}(x) = (x, f(x)).$$

Från detta blir derivatan

$$\mathbf{r}'(x) = (1, f'(x)),$$

med längden

$$\|\mathbf{r}'(x)\| = \|(1, f'(x))\| = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

7 Parametrisering av ytor

Definition 11. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat, kvadrerbart område. En C^1 -funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad C^1 -yta i $\mathbb{R}^n$

Vi kommer fokusera på fallet då $n = 3$, det vill säga då det handlar om en yta i rummet.

Låt $f(x, y)$ vara en C^1 -funktion av 2 variabler sådan att $z = f(x, y)$ är en funktionsyta. En naturlig parametrisering är då

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

En sfär av radie a kring origo parametriseras mest naturligt med sfäriska koordinater

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (a \sin(\theta) \cos(\phi), a \sin(\theta) \sin(\phi), a \cos(\theta)). \end{aligned} \quad (4)$$

7.1 Area av en parametriserad yta

Givet en parametrisering

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

kan ett infinitesimalt areaelement bestämmas som $dS = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är infinitesimalt små förändringsvektorer till ytan. Vid förändringarna $(s, t) \mapsto (s + ds, t)$ och $(s, t) \mapsto (s, t + dt)$ får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s + ds, t) &= \mathbf{r}(s, t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) ds \\ \implies \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) ds \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s, t + dt) &= \mathbf{r}(s, t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) dt \\ \implies \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) dt \end{aligned}$$

vilket ger den infinitesimala arean

$$dS = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Då kan arean av en parametriserad yta beräknas som

$$\text{Ytarea} = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Ett viktigt specialfall är när arean av en funktionsyta ska bestämmas. Låt $z = f(x, y)$, då kan ytan parametriseras enligt

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

som har arean

$$\begin{aligned} \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| dx dy &= \iint_D \|(1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y)\| dx dy \\ &= \iint_D \|(-f_x, -f_y, 1)\| dx dy = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Ett annat specialfall är när man har en implicit definierad funktionsyta. Låt $F(x, y, z) = 0$ vara en hypernivåyta, där $F_z \neq 0$. Då har vi enligt implicita funktionssatsen en funktionsyta $z = f(x, y)$ som uppfyller att

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{F_x}{F_z} \\ f_y &= -\frac{F_y}{F_z}. \end{aligned}$$

Detta ger, tillsammans med ekvation (5), arean

$$\iint_D \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} dx dy = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dx dy = \iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy.$$

Som exempel kan arean av sfären med parametriseringen enligt (4) beräknas enligt

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi a^2$$

8 Vektorfält och kurvintegraler

Definition 12. Låt $n \in \mathbb{N}$. En vektorvärd funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för ett n -dimensionellt vektorfält.

Definition 13. Låt $n \in \mathbb{N}$. En funktion av n variabler $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för ett n -dimensionellt skalärfält.

Definition 14. Låt $n \in \mathbb{N}$, låt $\gamma = \{\mathbf{r}(t) | a \leq t \leq b\}$ vara en C^1 -kurva i $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett C^0 -vektorfält. Kurvintegralen av vektorfältet längs kurvan γ ges av

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (6)$$

Det går att visa att kurvintegralen är oberoende av parametriseringen av γ på samma sätt som i avsnitt 6.1.

Integralen i ekvation (6) kan fysikaliskt tolkas som arbetet som utförs då en partikel påverkas av en kraft $\mathbf{F}$ längs kurvan γ . Ett viktigt exempel från fysiken som kan visas med hjälp av kurvintegralen är att vid fritt fall är arbetet som utförs lika med förändringen i kinetisk energi. För att visa detta behöver vi först ett lemma.

Lemma 1. Låt $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 -kurvor. Då är

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t).$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) &= \sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot v_i(t) \implies \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(u_i(t) \cdot v_i(t)) = \\ \sum_{i=1}^n u_i'(t) \cdot v_i(t) + \sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot v_i'(t) &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t). \end{aligned}$$

□

Vi kan nu sätta in kraften $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''(t)$ från Newtons andra lag i ekvation (6). Då får vi att arbetet kan uttryckas som

$$\int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Med hjälp av Lemma 1 kan vi skriva om detta till

$$\int_a^b \frac{m}{2} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt.$$

Vid uträkning får vi då att

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{m}{2} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}'(t)\|^2) dt = \\ \frac{m \|\mathbf{r}'(b)\|^2}{2} - \frac{m \|\mathbf{r}'(a)\|^2}{2} &= \Delta K. \end{aligned}$$

Ett annat fysikaliskt exempel på temat är Keplers lag. Den säger att om en partikel utför en centralrörelse så är dess rörelsemängdsmoment konstant.

Definition 15. Rörelsemängdsmomentet för en partikel ges av $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$, där $\mathbf{p}(t)$ är partikelns rörelsemängd. Alltså gäller att rörelsemängdsmomentet

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)).$$

Med hjälp av definitionen av rörelsemängdsmoment och ett lemma kan vi visa Keplers lag.

Lemma 2. Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 -kurvor i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$$

Vi kan nu visa Keplers lag. Det räcker att visa att $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = 0$. Enligt Lemma 2 får vi att

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t).$$

Den första termen $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)$ är noll eftersom kryssprodukten av en vektor med sig själv alltid är noll. Den andra termen $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ är noll på grund av att $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r}''$ är antiparallella vid centralrörelse och därav är rörelsemängdsmomentet konstant.