

# Sammanfattning av läsvecka 4 och 5

## Flervariabelsanalys MVE035/MVE600

Samuel Alvinge, Axel Blom, Wilhelm Dahlin,  
Max Jisonsund, Oskar Pauli och Alfred Wärnsäter

28 februari 2020

## 1 Multipelintegraler och nollutvidgningar

För att beräkna integraler använder man sig ofta av axelparallella rektanglar. Området som ska integreras över delas då upp i ett antal axelparallella rektanglar vars integraler beräknas och adderas för att få fram resultatet. För att beräkna dessa integraler används de metoder och satser som beskrivs nedan. Vi börjar med en sats och en definition.

**Sats.** *Varje kontinuerlig funktion är integrerbar över en axelparallell rektangel och Fubinis sats gäller.*

**Definition.** Låt  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  begränsat. För en supermängd  $D^* \supseteq D$  och en funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  så kan vi definiera nollutvidgningen av  $f$  till  $D^*$  vilket är funktionen  $f^* : D^* \rightarrow \mathbb{R}$  som ges av

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{om } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{om } \mathbf{x} \in D^* \setminus D \end{cases}$$

Vi säger att  $f$  är integrerbar på  $D$  om det finns en axelparallell rektangel  $\Delta \supseteq D$  så att nollutvidgningen av  $f$  till  $\Delta$  är integrerbar över  $\Delta$ .

### 1.1 Nollmängder

En mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  sägs vara en nollmängd om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ändligt många axelparallella rektanglar

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

så att

$$\bigcup_{i=1}^n \Delta_i \supseteq D \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^n \text{arean}(\Delta_i) < \epsilon.$$

*Anmärkning.* En nollmängd är en mängd vars rand ej har en area vilket oftast är en glatt kurva.

## 1.2 Kvadrerbara mängder

En mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  sägs vara kvadrerbar om dess rand är en nollmängd.

**Sats.** Om  $D$  är en begränsad kvadrerbar mängd i  $\mathbb{R}^2$  och  $f$  är en kontinuerlig funktion av två variabler så gäller att  $f$  är integrerbar över  $D$ .

**Sats.** Låt  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$  där  $\alpha, \beta$  är kontinuerliga funktioner. Då gäller

- $D$  är en kvadrerbar mängd
- Om  $f$  integrerbar över  $D$  och Fubinis sats gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \quad (1)$$

## 1.3 Trippelintegraler

Beräkningar av trippelintegraler sker på samma sätt som när man beräknar dubbelintegraler med tillägget att det görs fler gånger. Om  $D$  till exempel är

$$D = \{(x, y, z) ; \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in E\}$$

så ges integralen av

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_E \left( \int_{z=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy$$

För att beräkna den yttre dubbelintegralen krävs att  $E$  är projektionen av  $D$  på  $xy$ -planet. Det går också att använda sig av variabelbyten för att beräkna trippelintegraler på samma sätt som när det används för att beräkna dubbelintegraler. Formeln för detta ges av

$$\iiint_D f(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iiint_E f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) |J(\mathbf{u})| \, du_1 \, du_2 \, du_3,$$

Ett exempel på ett sådant variabelbyte är det från kartesiska koordinater till sfäriska koordinater som görs på följande sätt.

$$\begin{aligned}x &= \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\y &= \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\z &= \rho \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

$$dx \, dy \, dz = \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right\| \cdot d\rho \, d\theta \, d\phi = \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Detta ger

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_E G(\rho, \theta, \phi) \, \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

där  $G(\rho, \theta, \phi)$  är en funktion av de ny variablerna.

## 1.4 Integraler i högre dimensioner

För integraler i dimensioner högre än tre använder vi följande beteckning.

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n \iff \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (2)$$

I flera dimensioner definieras volymen, likt i två och tre dimensioner,  $\mu(D)$  som

$$\mu(D) = \int_D 1 \, d\mathbf{x} \quad (3)$$

där  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## 1.5 Beräkning av multipelintegraler

Vi använder vid beräkning av multipelintegraler samma metoder som vid beräkning av dubbel-, trippel- och enkelintegraler det vill säga itererad integration, variabelbyte och integration med hjälp av så kallade nivååtor. Användning av nivååtor ger till exempel att integralen  $\int_a^b h(|\mathbf{x}|) d\mathbf{x}$  är lika med  $\int_a^b h(r) \cdot V'(r) dr$  där

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; a \leq |\mathbf{x}| \leq b\} \text{ \& } V(r) \text{ är volymen av klotet } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x}| \leq r\}$$

## 2 Vektorfält och kurvintegraler

### 2.1 Definition av vektorfält

**Definition.** Låt  $n \in \mathbb{N}$ . En vektorvärd funktion

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

kallas för ett  $n$ -dimensionellt vektorfält. Observera att om målmängden är endimensionell så kallas  $\mathbf{F}$  för ett skalärfält.

### 2.2 Definition av kurvintegral

**Definition.** Låt  $n \in \mathbb{N}$  och låt  $\gamma$  vara en  $C^1$ -kurva i  $\mathbb{R}^n$  så att  $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ , och låt  $\mathbf{F}$  vara ett  $n$ -dimensionellt vektorfält av klass  $C^0$ . Kurvintegralen av vektorfältet  $\mathbf{F}$  över kurvan  $\gamma$  ges av

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (4)$$

Definitionen används inom fysik för beräkning av det arbete som ett kraftfält utför på en partikel som rör sig längs en kurva.

### 2.3 Uttryck för fysikaliska storheter

Betrakta en partikel som rör sig längs en bana  $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ . För en godtycklig tidpunkt  $t$  fås partikelns position av  $\mathbf{r}(t)$ , dess hastighet av  $\mathbf{r}'(t)$  och dess acceleration av  $\mathbf{r}''(t)$ . Partikelns fart fås av  $|\mathbf{r}'(t)|$  och är användbar vid exempelvis beräkning av en kurvas längd.

Av Newtons andra lag följer det att  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  i den så kallade arbetsintegralen i (4) kan ersättas som  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$  där  $m$  betecknar den rörliga partikelns massa.

## 3 Mekaniktillämpningar

### 3.1 Tyngdpunkt

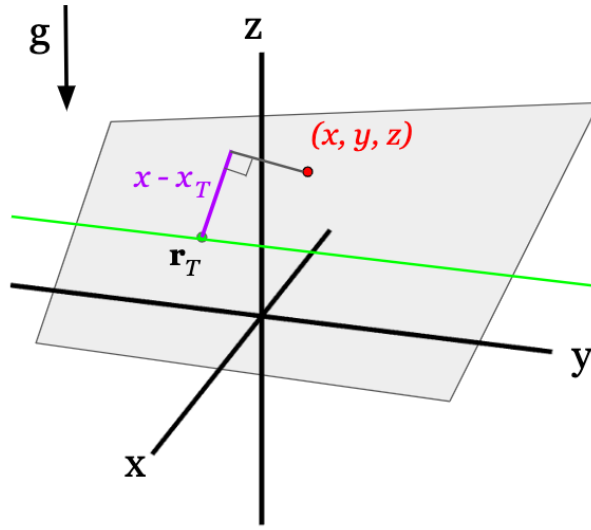
Låt  $K$  vara en kropp i  $\mathbb{R}^3$  med varierande densitet  $\rho(x, y, z)$ . Punkten kring vilken kroppen är i momentjämvikt, oavsett riktning på den parallellverkande tyngdkraften, definieras som kroppens tyngdpunkt. Tyngdpunkten  $\mathbf{r}_T$  bestäms enligt

$$\mathbf{r}_T = (x_T, y_T, z_T). \quad (5)$$

Antag att tyngdkraften verkar i  $z$ -axelns riktning. Momentet för ett masselement  $dm = \rho(x, y, z)dxdydz$  i punkten  $(x, y, z)$  med avseende på en axel genom  $\mathbf{r}_T$  parallell med  $y$ -axeln blir då

$$g\left(\rho(x, y, z)dxdydz\right)(x - x_T), \quad (6)$$

där  $g$  är tyngdkraftsaccelerationen och  $(x - x_T)$  är det vinkelräta avståndet i  $x$ -led från punkten  $(x, y, z)$  till axeln genom  $\mathbf{r}_T$ . Se figur nedan.



Figur 1: Moment av ett masselement  $dm$  i punkten  $(x, y, z)$ . Den skuggade fyrhörningen beskriver en kropp  $K$ .

Momentet med avseende på samtliga axlar ges av trippelintegralen

$$\iiint_K (x - x'_T)\rho(x, y, z)dxdydz = 0. \quad (7)$$

Ekvationen kan skrivas om till

$$mx_T = \iiint_K x\rho(x, y, z)dxdydz,$$

där

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Alltså kan  $x_T$  skrivas som

$$x_T = \frac{\iiint_K x\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_K \rho(x, y, z)dxdydz}. \quad (8)$$

Koordinaterna  $y_T$  och  $z_T$  bestäms på samma vis.

### 3.2 Tröghetsmoment

Låt återigen  $K$  vara en kropp i  $\mathbb{R}^3$  med varierande densitet  $\rho$ . Kroppen roterar med vinkelhastigheten  $\omega$  kring en fixerad axel  $l$ . Det vinkelräta avståndet från punkten  $(x, y, z)$  till  $l$  betecknas med  $a(x, y, z)$  och har hastigheten  $v = a\omega$ . Rörelseenergin för ett masselement  $dm = \rho dx dy dz$  i punkten  $(x, y, z)$  blir enligt formeln  $\frac{1}{2}mv^2$  lika med

$$\frac{1}{2}dm(a\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \rho a^2 dx dy dz.$$

Hela kroppens rörelseenergi ges alltså av trippelintegralen

$$\frac{1}{2} \iiint_K \rho a^2 \omega^2 dx dy dz. \quad (9)$$

Om vi sätter att

$$J = \iiint_K \rho a^2 dx dy dz$$

kan rörelseenergin nu beskrivas som

$$\frac{1}{2}J\omega^2. \quad (10)$$

Talet  $J$  är kroppens tröghetsmoment med avseende på axeln  $l$ , och beskriver det vridmoment som krävs för att kroppen  $K$  ska uppnå en specifik vinkelhastighetsförändring  $\Delta\omega$  per bestämd tidsenhet. Beräkning av  $J$  blir speciellt enkel när  $l$  sammanfaller med en av koordinataxlarna. Om  $K$  till exempel roterar kring  $y$ -axeln är  $a(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$  och

$$J = \iiint_K \rho(x, y, z)(x^2 + z^2) dx dy dz.$$

### 3.3 Det $n$ -dimensionella enhetsklotet

**Sats.** Låt  $B_n$  vara det  $n$ -dimensionella enhetsklotet och  $V_n = \text{vol}(B_n)$ . Då gäller att

$$V_1 = 2, \quad V_2 = \pi, \quad V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} \quad \forall n \geq 3. \quad (11)$$

*Bevis.* Låt

$$V_n = \int \dots \int_{B_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (12)$$

och

$$B_n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \leq 1 - (x_{n-1}^2 + x_n^2) \Leftrightarrow x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2. \quad (13)$$

Använd Fubinis sats och integrera först med avseende på  $x_{n-1}$  och  $x_n$ . Vi får då att

$$\int_{B_n} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_{n-2}} dx_1 \dots dx_{n-2} \left( \iint_C dx_{n-1} dx_n \right),$$

där  $C$  är cirkelskivan i  $(x_{n-1} - x_n)$  - planet. Alltså kan likheten ovan skrivas som

$$\int_{B_n} dx_1 \dots dx_n = \pi \int_{B_{n-2}} \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \right) dx_1 \dots dx_{n-2}. \quad (14)$$

Låt nu  $g(x_1, \dots, x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ . Då är  $h(r) = 1 - r^2$  och

$$B_{n-2} = D_{0,1} = \{(x_1, \dots, x_{n-2}) \mid 0 \leq g \leq 1\}.$$

Nu kan högerledet i ekvation 14 skrivas om till

$$\pi \int_0^1 h(r) V'(r) dr, \quad (15)$$

där  $V(r) = \text{Vol}(D_{0,r})$ . Eftersom  $D_{0,r}$  är ett  $(n-2)$  - dimensionellt klot med radien  $r$  är

$$V(r) = V_{n-2} r^{n-2}$$

och

$$V'(r) = V_{n-2} (n-2) r^{n-3}.$$

Insättning i ekvation 15 ger att

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_0^1 (1 - r^2) V_{n-2} (n-2) r^{n-3} dr = \\ &= \pi (n-2) V_{n-2} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}. \end{aligned} \quad (16)$$

□

## 4 Volymberäkning med hjälp av trippelintegral

Låt en generell trippelintegral vara

$$I = \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz.$$

## 4.1 Fysikalisk tolkning av trippelintegral

Betrakta kuben  $Q \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^3$  med sidorna  $dx$ ,  $dy$   $dz$  och låt  $f(x, y, z)$  vara en funktion för densiteten i punkten  $(x, y, z)$ . Densiteten i  $Q$  kan antas vara konstant ty kuben är godtyckligt liten. Massan av  $Q$  ges då av

$$dm = f(x, y, z) dx dy dz.$$

För att beräkna massan av hela kroppen  $K$  integrerar man över alla massbidrag  $dm$  i  $K$ , detta ger

$$m(K) = \iiint_K dm = \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = I.$$

Således är den fysikaliska tolkningen av en trippelintegral att

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = m(K).$$

## 4.2 Volymberäkning

Låt  $f(x, y, z) = 1$ . Eftersom massan är lika med densiteten gånger volymen gäller

$$\iiint_K dx dy dz = \text{vol}(K)$$

om  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ . Vidare om området  $K$  begränsas av två funktionsgrafer till  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ , alltså den mängd

$$K = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

där  $E$  är projektionen av  $K$  på  $xy$ -planet, gäller

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \iiint_K dx dy dz = \iint_E \left( \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_E (g(x, y) - f(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

## 4.3 Koordinatbyten

Det kan vara av intresse att göra ett koordinatbyte för att förenkla området  $K$  till ett mer hanterligt område  $G$ . Det finns en allmän sats som generaliserar satsen för variabelbyten i dubbelintegraler så att den gäller för tre variabler. Låt



$$\begin{aligned}x &= g(u, v, w) \\y &= h(u, v, w) \\z &= k(u, v, w),\end{aligned}$$

det gäller då att

$$\begin{aligned}&\iiint_K f(x, y, z) \, dx dy dz = \\&= \iiint_G f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du dv dw\end{aligned}$$

där

$$J(u, v, w) = \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)}.$$

Eftersom man vid volymberäkning låter  $f(x, y, z) = 1$  kommer även

$$f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = 1$$

gälla efter ett godkänt variabelbyte. Detta innebär att det för volymberäkning vid ett koordinatbyte följer

$$\text{vol}(K) = \iiint_K dx dy dz = \iiint_G |J(u, v, w)| du dv dw.$$

Volymen av  $K$  vid ett koordinatbyte till cylindriska koordinater:

$$\text{vol}(K) = \iiint_{G_c} r dr d\theta dz.$$

Volymen av  $K$  vid ett koordinatbyte till sfäriska koordinater:

$$\text{vol}(K) = \iiint_{G_s} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi.$$

## 5 Kurvor

Vi börjar med en definition.

**Definition** (*Av kurva*). Låt  $a < b$  vara reella tal och  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  en vektorvärd  $\mathcal{C}^1$ -funktion. Bilden  $\mathbf{r}([a, b])$  kallas för en  $\mathcal{C}^1$ -kurva i  $\mathbb{R}^n$  och själva funktionen  $\mathbf{r}$  kallas för en parametrisering av kurvan.

**Exempel.** Ser vi på det rätta linjesegmentet i planet mellan origo och punkten  $(1, 1)$  kan detta å ena sidan parametreras som

$$\mathbf{r}(t) = (t, t), \quad \text{för } 0 \leq t \leq 1$$

å andra sidan som

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right), \quad \text{för } 0 \leq t \leq 2.$$

Ovanstående exempel belyser det faktum att en och samma kurva kan ha olika parametreringar.

## 5.1 Acceleration, hastighet och fart

Om vi i en parametrering av en kurva tolkar parametern  $t$  som en tidpunkt leds vi till att göra följande naturliga definitioner.

**Definition** (*Av hastighet, acceleration och fart*). Låt  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara en parametriserad  $\mathcal{C}^1$ -kurva som representerar en partikels rörelse mellan tidpunkterna  $t = a$  och  $t = b$ . Då säger vi att partikelns

- (i) **hastighet** vid tidpunkten  $t$  är  $\mathbf{r}'(t)$
- (ii) **fart** vid tidpunkten  $t$  är  $|\mathbf{r}'(t)|$
- (iii) **acceleration** vid tidpunkten  $t$  är  $\mathbf{r}''(t)$ .

Med dessa definitioner kan vi i föregående exempel säga att de båda partiklarna rör sig längs samma bana med olika hastighet och fart, förutsatt att lämpliga enheter har valts. Dock har de samma acceleration.

## 5.2 Kurvlängd

Håller vi oss till den fysiska tolkningen av parametreringen och betraktar längden  $ds$  som partikeln rör sig under tiden  $dt$  kan vi approximera denna genom att anta att rörelsen sker med konstant hastighet under tiden  $dt$ . Vi har alltså

$$ds \approx |\mathbf{r}'(t)| dt$$

som en approximation. Låter vi tiden vara mycket liten och integrerar mellan tidpunkterna  $t = a$  och  $t = b$  får vi

$$S = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

där  $S$  är sträckan som partikeln färdats mellan tidpunkterna  $t = a$  och  $t = b$ . Mer allmänt talar man om **kurvlängden** mellan två punkter på kurvan.

Om det ska finnas någon mening i att tala om en kurvas längd bör denna vara oberoende av vilken parametrisering vi använder. Låter vi  $\gamma$  vara en kurva med tillhörande parametrisering  $\mathbf{r}(t)$  har vi kurvlängden  $S$  som ovan mellan tidpunkterna  $t = a$  och  $t = b$ . Byter vi parametrisering genom

$$t = \phi(u), \quad \text{för} \quad \alpha \leq u \leq \beta,$$

där  $\phi(\alpha) = a$  och  $\phi(\beta) = b$  och betraktar  $u$  som vår nya parameter får vi med hjälp av kedjeregeln att kurvlängden blir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du &= \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \right| du = \\ \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(\phi(u)) \cdot \phi'(u)| du &= \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(\phi(u))| \phi'(u) du \end{aligned}$$

och om vi göra variabelbytet  $t = \phi(u)$  i denna får vi

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

vilket är samma kurvlängd som för den ursprungliga parametriseringen.

### 5.3 Integration av skalärvärda funktioner

Låt  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , vara en parametriserad  $C^1$ -kurva  $\gamma$  i  $\mathbb{R}^n$  och  $f(\mathbf{x})$  en integrerbar funktion av  $n$  variabler. Integralen av  $f$  längs kurvan sägs då vara

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Speciellt får vi för  $f(\mathbf{x}) = 1$  kurvans längd.

En fysikalisk tolkning av uttrycket ovan är om vi har en tunn sträng som sträcker sig i tre dimensioner och där  $f(\mathbf{x})$  beskriver stavens densitet i punkten  $\mathbf{x}$ . Då beskriver integralen ovan strängens totala massa.

## 6 Ytor

### 6.1 Parametrisering av ytor

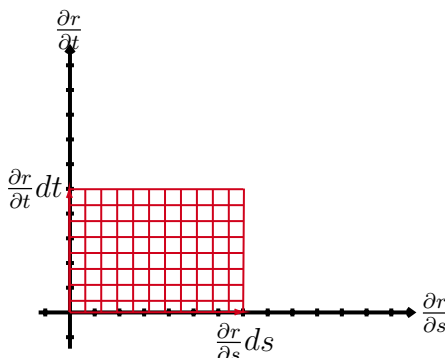
**Definition.** Låt  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  vara ett begränsat, kvadrerbart område. En  $C^1$ -funktion  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  kallas för en parametriserad  $C^1$ -yta i  $\mathbb{R}^n$ .

Vi fokuserar speciellt på fallet  $n = 3$ , alltså när vi är i rummet.

## 6.2 Area av en parametriserad yta

Givet en parametrisering  $\mathbf{r}(s, t)$ , där  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  samt  $s, t \in D$ , ska vi ta reda på det infinitesimala areaelementet  $dS$ .

I en viss punkt  $\mathbf{r}(s, t)$  på ytan finns vektorerna  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$  och  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$  som tillhör tangentplanet. Om man går  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds$  och  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$  i respektive riktningar får man två infinitesimala längder, samt en area vilket illustreras i Figur 2.



Figur 2: Illustration av arean av parallelogrammet som spänns upp av de två vektorerna.

Denna infinitesimala arean är storleken av vektorprodukten

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt \quad (17)$$

Detta leder till att satsen för area av en parametriserad yta kan skrivas upp.

**Sats.** Låt  $D$  vara ett begränsat område i  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  en parametriserad yta. Då gäller att ytans area ges av

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt. \quad (18)$$

Speciellt för funktionsytor  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  har vi att ytarean av denna funktion ges av:

$$\iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy \quad (19)$$

### 6.3 Integration av skalärfält över ytor

Låt  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara en parametriserad  $C^1$ -yta och  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en skalärvärd integrerbar funktion. Då gäller att "integralen av  $f$  över ytan" =

$$\iint_D (f(\mathbf{r}(s, t)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt. \quad (20)$$