Sammanfattning-läsvecka 3

Anton Wallin
Emil Zaya
Lisa Lövgren
Tomas Alander
Tomas Thure
Yixuan Pan

6 mars 2020

Innehåll

1 Implicita funktionssatsen för 2 variabler

Formulering: Låt $F(x, y)$ vara en C^1-funktion och (a, b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $F_y(a, b) \neq 0$ så finns en omgivning U till (a, b) s.a. restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1-funktion $y = f(x)$. För derivatan gäller: $f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$.

Beviset av satsen utelämnas, men notera att givet existensen av en sådan omgivning U, följer formeln för $f'(x)$ från implicit derivering, alltså kedjeregeln. $F(x, y) = C$ och $y = f(x)$. Utför variabelbytet $u = x, v = f(x)$. $\Rightarrow F(x, y) = F(u, v) = F(u(x), v(x)) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=f'(x)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\partial F/\partial u}{\partial F/\partial v} = -\frac{F_x}{F_y}$.

2 Integration i 2 variabler

"Definition". Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Då är

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

den tecknade volymen mellan funktionsytan $z = f(x, y)$ och arean D i xy-planet, där $f(x, y)$ är höjden, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en infinitesimal rektangel i xy-planet och $f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en infinitesimal tecknad volym.

2.1 Fubinis sats 1.0

Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion och Δ vara en axelparallell rektangel enligt $\Delta = \{(x, y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Då gäller det att

$$\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Intuitivt kan detta ses som att volymen skivas på 2 olika sätt.

2.2 Fubinis sats 2.0

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ där $\alpha(x), \beta(x)$ är kontinuerliga funktioner av x s.a. $\alpha(x) \leq \beta(x), \forall x \in [a, b]$. Om $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion innebär det att

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

2.3 Variabelbyten i dubbelintegraler

Sats 6.4.6 förklarar det väsentliga med variabelbyten i dubbelintegraler. Ett viktigt och användbart exempel på ett variabelbyte är bytet mellan kartesiska och polära koordinater.

2.3.1 Sats 6.4.6

Låt $x = g(u, v), y = g(u, v)$ vara en bijektiv C^1-avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv-planet på ett motsvarande område D i xy-planet sådan att $J(u, v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ i E. Då är

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \mid J(u, v) \mid \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4}$$

2.3.2 Polära koordinater

Gör variabelbytet $g(r, \theta) = rcos(\theta)$, $h(r, \theta) = rsin(\theta)$, där

$$| J(u, v) |= \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = det \begin{pmatrix} cos(\theta) & -rsin(\theta) \\ sin(\theta) & rcos(\theta) \end{pmatrix} = r. \tag{5}$$

Då ges

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_E f(g(r, \theta), h(r, \theta))r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta. \tag{6}$$

2.4 Dubbelintegraler och nivåkurvor

Sats: Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en C^1-avbildning och $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en C^0-avbildning. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kvadrerbart och antag att $a \leq g(x, y) \leq b$, $\forall (x, y) \in D$. Sätt $A(u) =$Area$\{(x, y) \in D | g(x, y) \leq u\}$. Då gäller att:

$$\iint_D h(g(x, y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b h(u)A'(u)\, \mathrm{d}u. \tag{7}$$

3 Föreläsning 3

3.1 Gauss sats

Gauss sats säger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \tag{8}$$

Bevis. Sätt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Med Fubinis sats

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Variabelbyte till polära koordinater ger

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r = 2\pi \Big(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big) \Big|_0^{\infty} = \pi. \tag{11}$$

$$\iff I^2 = \pi.$$

$$\implies I = \sqrt{\pi}.$$

□

3.2 Generaliserade dubbelintegraler

Det finns två typer av generaliserade dubbelintegraler, antingen är funktionen obegränsad eller så är området som integreras över obegränsat. I envariabelanalysen gäller följande exempel för obegränsad funktion:

$$\int_0^1 x^t \mathrm{d}x \overset{t \leq 0}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^1 x^t \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{t+1}, & t > -1 \\ \infty, & t \leq -1. \end{cases}$$

För ett obegränsat område gäller följande:

$$\int_1^{\infty} x^t \mathrm{d}x \overset{t \leq 0}{=} \lim_{N \to \infty} \int_1^N x^t \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{t+1}, & t < -1 \\ \infty, & t \geq -1. \end{cases}$$

För dubbelintegraler med flera variabler gäller samma princip som för enkelintegraler med en variabel. Målet är att med hjälp av Fubinis sats samt eventuella variabelbyten, reducera två variabler till en och sedan applicera ovanstående princip.

4 Föreläsning 4

4.1 Def 0.1

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ s.a. $a \leq c,\ b \leq d$. Mängden $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ given av

$$\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \tag{12}$$

kallas för en sluten axelparallell rektangel.

Notation: $\Delta = [a, b] \times [c, d]$.

4.2 Def 0.2

Givet $a \leq b$, en partition av det slutna intervallet $[a, b]$ är en ändlig sekvens

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b. \tag{13}$$

4.3 Def 1

Givet en axelparallell rektangel $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och partitionerna

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \tag{14}$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{m-1} < x_m = d. \tag{15}$$

En funktion $\Phi : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ kallas för en trappfunktion om Φ har ett konstant värde på varje delrektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

Dubbelintegralen av Φ definieras som

$$\iint_\Delta \Phi(x, y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) c_{ij}, \tag{16}$$

där c_{ij} är Φ:s konstanta värde på delrektangeln $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$.

4.4 Def 2

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ en funktion. f sägs vara integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ, Ψ på Δ sådana att.

$$\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \Delta, \tag{17}$$

$$\iint_\Delta \Psi(x, y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \iint_\Delta \Phi(x, y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \varepsilon. \tag{18}$$

Notera att om f är integrerbar över Δ så är

$$\sup_{\Phi \leq f} \iint_\Delta \Phi(x, y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \ = \ \inf_{\Psi \geq f} \iint_\Delta \Psi(x, y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \ \overset{\text{Def}}{=} \ \iint_\Delta f(x, y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{19}$$

4.5 Sats 6.1.3

Låt $\mathit{\Delta} = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \mathit{\Delta} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då gäller att:

1. f är integrerbar över Δ.
2. $\iint_\Delta f(x, y)dxdy = \int_b^d dy(\int_a^c f(x, y)dx) = \int_a^c dx(\int_b^d f(x, y)dy)$.

Beviset av denna sats utnyttjar följande tre lemman.

4.6 Lemma 1

Låt $K \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd och $f : K \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då är f likformigt kontinuerlig på K, dvs $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, så att

$$(x_1, x_2 \in K) \quad \text{och} \quad \|x_1 - x_2\| < \delta \implies | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon. \tag{20}$$

4.7 Lemma 2

Om $\mathit{\Delta} = [a, c] \times [b, d]$ och $f : \mathit{\Delta} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, så existerar båda de itererade enkelintegralerna

$$\int_b^d dy(\int_a^c f(x, y)dx) \tag{21}$$

och

$$\int_a^c dx(\int_b^d f(x, y)dy). \tag{22}$$

4.8 Lemma 3

Om $\mathit{\Delta} = [a, c] \times [b, d]$ och $\mathit{\Phi} : \mathit{\Delta} \to \mathbb{R}$ är en trappfunktion, så är

$$\iint_\Delta \Phi(x, y)dxdy = \int_b^d dy(\int_a^c \Phi(x, y)dx) = \int_a^c dx(\int_b^d \Phi(x, y)dy). \tag{23}$$