

FLERVARIABELANALYS MVE035

Sammanfattning av läsvecka 4 & 5

Grupp A

*Av: Isak Nilsson, Eric Le, Adam Johansson, Gustav Birath Blom,
Wilhelm Olofsson, David Reinsfelt*

Examinator
Peter Hegerty
7 mars 2020

1 Sats 6.1.3

Om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta\{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så är f integrerbar över denna. Vidare gäller Fubinis sats.

2 Allmän definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara begränsad. För en supermängd $D^* \supseteq D$ och en funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, så kan vi definiera nollutvidgningen av f till D^* , vilket är funktionen $f^* : D^* \mapsto \mathbb{R}$ som ges av

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{om } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{om } \mathbf{x} \in D^* \setminus D \end{cases} \quad (1)$$

Vi säger att f är integrerbar på D om det finns en axelparallell rektangel $\Delta \supseteq D$ så att nollutvidgningen av f till Δ är integrerbar över Δ .

3 Nollmängder

En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara en nollmängd om det för varje $\epsilon > 0$ finns ändligt många axelparallella rektanglar $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ så att

$$(i) \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \supseteq D$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n \text{Area}(\Delta_i) < \epsilon$$

3.1 Definition

En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara kvadrerbar om dess rand är en nollmängd.

Om $x \subseteq \mathbb{R}^n$, består ∂x av de punkter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ så att varje omgivning till $\mathbf{p}$ innehåller punkter både innanför och utanför x .

En nollmängd i $\mathbb{R}^2$ utan area är alltså en kvadrerbar mängd som vars rand inte har någon area (består av glatta kurvor).

4 Några satser

4.1 Sats 1

Om D är en begränsad kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^2$ och f är en kontinuerlig funktion av två variabler så är f integrerbar över D .

4.2 Sats 2

Låt $D = \{ (x, y); a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$, där α & β är kontinuerliga funktioner. Då gäller

(i) D är en kvadrerbar mängd

(ii) Om f är kontinuerlig så är f integrerbar över D och Fubinis sats gäller,

$$\text{det vill säga } \int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy$$

4.2.1 Exempel

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{då } (x, y) \in Q \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

är inte integrerbar.

Ett annat sätt att visa att integralen inte är integrerbar är att undersöka mängden $D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] | (x, y) \in Q\}$, vilket inte är kvadrerbar ty $\partial D = [0, 1] \times [0, 1]$ som tydligt inte är en rektangel.

5 Integration i högre dimensioner och trippelintegraler

5.1 Trippelintegraler

Om vi har trippelintegralen $\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$ kan vi tolka den som en tecknad volym i $\mathbb{R}^4$.

5.1.1 Användningsområden

- Vi kan använda trippelintegraler för att beräkna volymer i $\mathbb{R}^3$. Om vi sätter $f = 1, D \in \mathbb{R}^3$ så är $\text{vol}(D) = \iiint_D dx dy dz$.
- Om man kan visa att området D begränsas av två funktionsgrafer, $D = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ så kan trippelintegralen reduceras till en dubbelintegral vilket ger

$$\iiint_D dx dy dz = \iint_E dx dy \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} dz = \iint_E [g(x, y) - f(x, y)] dx dy \quad (2)$$

där E är projektionen av D på xy -planet.

5.2 Koordinatbyten

Om vi har $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$, $z = k(u, v, w)$ så är

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw \quad (3)$$

där $J(u, v, w) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$

5.2.1 Cylindriska koordinater

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = z \Rightarrow dx dy dz = r \cdot dr d\theta dz$$

5.2.2 Sfäriska koordinater

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\alpha), y = \rho \sin(\theta) \sin(\alpha), z = \rho \cos(\theta) \Rightarrow dx dy dz = \rho^2 \sin(\theta) \cdot d\rho d\theta d\alpha$$

6 Kurvor och ytor

6.1 Kurvor och parametrisering

Definition Låt $n \in \mathbb{N}$ samt $a < b \in \mathbb{R}$. En kontinuerlig funktion $\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad orienterad kurva i $\mathbb{R}^n$.

I samband med definitionen gör vi följande observationer:

- (i) Ett orienteringsbyte utförs genom att byta ut parametriseringen $\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ mot $\mathbf{s} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ där $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b + a - t)$. Sätt $t = a$ då $\mathbf{s}(a) = \mathbf{r}(b)$ även $\mathbf{s}(b) = \mathbf{r}(a)$
- (ii) En och samma orienterad kurva kan parametriseras på oändligt många sätt.

Notation Standardnotation för kurvor, med eller utan specificerad parametrisering är γ . Notera även att $-\gamma$ innebär ett byte av orientering.

6.1.1 Fysikalisk tolkning av kurva

Den fysikaliska tolkningen av en parametriserad, orienterad kurva

$$\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^{n(=3)} \quad (4)$$

är att en partikel rör sig mellan tiderna $t = a$ och $t = b$, mellan startpunkten $\mathbf{r}(a)$ och slutpunkten $\mathbf{r}(b)$, längs kurvan

$$\gamma = \mathbf{r} : [a, b] \quad (5)$$

Givet en parametriserad kurva

$$\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n, t \in [a, b] \quad (6)$$

definierar vi följande

Definition

- (i) Hastigheten vid tiden t är $\mathbf{r}'(t)$.
- (ii) Farten vid tiden t är $\|\mathbf{r}'(t)\|$.
- (iii) Accelerationen vid tiden t är $\mathbf{r}''$.

7 Kurvlängd

Antag att vi har en kurva $\gamma \in C^1$ med ortsvektorn $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tänker man sig en partikel som färdas längs med γ kommer den, mellan tiderna t och $t + dt$, att färdas sträckan $ds = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$. Alltså har vi att kurvlängden

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (7)$$

Ett specialfall av kurvlängden i $\mathbb{R}^2$ är då γ beskriver en funktion $y = f(x)$. Den naturliga parametreringen är då

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, f(x)). \quad (8)$$

Vi får att

$$\mathbf{r}'(x) = \frac{d}{dx}(x, f(x)) = (1, f'(x)) \quad (9)$$

varför kurvlängden

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (10)$$

Notera även att kurvlängden är oberoende av parametreringen. Vi bevisar detta nedan.

Bevis Säg att vi har två olika parametriseringar av samma kurva. $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vi antar att båda parametriseringarna är C^1 . Eftersom båda parametriseringarna startar och slutar i samma punkt (föreställ dig en partikel som startar i en punkt vid tiden a och slutar vid tiden b respektive c och d) medför detta att det existerar en växande funktion $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ sådan att

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\phi(t)), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (11)$$

Vi ska alltså visa att ekvationen

$$\int_a^b \|\mathbf{r}_1(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}_2(\phi(t))\| dt \quad (12)$$

stämmer. Vi gör variabelbytet $s = \phi(t)$, $ds = \phi'(t) dt$ i (12) och får

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \|\mathbf{r}_2'(s)\| \frac{ds}{\phi'(t)} = \int_c^d \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_2(s) \right\| \frac{ds}{\phi'(t)} = \int_c^d \left\| \frac{d}{ds} \mathbf{r}_2(s) \frac{ds}{dt} \right\| \frac{ds}{\phi'(t)} = \int_c^d \|\mathbf{r}_2'(s)\| ds. \quad (13)$$

Notera här att i det sista högerledet är $\mathbf{r}_2'(s)$ en derivata med avseende på s .

8 Rekursiva formeln för volymen av det n-dimensionella enhetsklotet

Låt $B_n = \{\mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ och låt $u(B_n)$ vara dess volym. Då gäller att:

$$\begin{cases} \mu(B_1) = 1 \\ \mu(B_2) = \pi \\ \mu(B_n) = \frac{2\pi}{n}(B_{n-2}) \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (14)$$

8.1 Bevisidé

B_1 motsvarar intervallet $[-1, 1]$ och B_2 är enhetscirkelskivan i planet. Därav blir volymen för dessa specialfall 2 respektive π volymenheter. för B_n gäller att

$$\mu(B_n) = \int \cdots \int_B dx_1 \dots dx_n \quad (15)$$

Vi kan skapa en rekursionsformel genom att använda itererad integration med en inre dubbelintegral med avseende på variablerna x_{n-1} och x_n , och en yttre multipelintegral av de övriga variablerna. Integrationsområdet i den inre integralen blir då en cirkelskiva i x_{n-1}, x_n -planet enligt följande:

$$x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2) \quad (16)$$

Utnyttjar vi detta tillsammans med Fubinis sats får vi en multipelintegral med avseende på $n - 2$ stycken variabler. Denna integral beräknas slutligen med formeln

$$\int_D h(|\mathbf{x}|) d\mathbf{x} = n\mu(B_n) \int_a^b h(r) r^{n-1} dr \quad (17)$$

som resulterar i det sökta uttrycket $\mu(B_n) = \frac{2\pi}{n}(B_{n-2})$.

9 Definition av massa för en kropp med tripelintegral

Antag att en kropp ockuperar ett område K i rummet och som har varierande densitet enligt funktionen $\rho(x, y, z)$. Då kan kroppens massa m definieras som:

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (18)$$

10 Definition av masscentrum med trippelintegral

Antag att masscentrum för en kropp K är punkten $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$ i rummet. Då beräknas varje element m_x enligt följande:

$$m_x = \frac{\iiint_K x \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K \rho(x, y, z)} \quad (19)$$

Detsamma gäller för elementen m_y och m_z .

11 Definition av medelvärde för trippelintegral

Låt $f(x, y, z)$ var en integrerbar funktion av 3 variabler och $K \in \mathbb{R}^3$ ett begränsat kvadrerbart område. Medelvärdet av f på K ges då av

$$\bar{f}_K = \frac{\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K dx \, dy \, dz} \quad (20)$$

12 Vektorfält och kurvintegraler

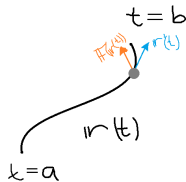
Innan vi kan bevisa fysikaliska fenomen t.ex. utfört arbete under fritt fall eller Keplers lag måste vi definiera några begrepp.

Definitioner

- Låt $n \in \mathbb{N}$ då kallas en vektorvärd funktion $\mathbf{F}$ i $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ för ett n -dimensionellt vektorfält. Exempelvis, med $n = 3$ skulle vektorfältet $\mathbf{F}$ kunna betraktas som ett "kraftfält".
- En funktion $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för ett skalärfält.
- Låt $n \in \mathbb{N}$, låt $\gamma = \mathbf{r}(t) | a \leq t \leq b$ vara en C^1 -kurva i $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara ett C^0 -vektorfält.
- Kurvintegral/arbetsintegral av ett vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurvan γ ges av $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$.

Fysikalisk tolkning av kurvintegral av ett vektorfält

Integralen = arbetet som utförs då en partikel tar sig längs kurvan γ under påverkan av kraften $\mathbf{F}$ (se figur 1).



Figur 1: En parametriserad kurva (där $\mathbf{r}(t)$ sträcker sig mellan $t = a$ och $t = b$) som skall föreställa en rörelse av en partikel som är påverkad av en kraft $\mathbf{F}(t)$ och har derivatan $\mathbf{r}'(t)$.

Anmärkning

m.h.a. kedjeregeln kan det bevisas att en kurvintegral är oberoende av parametriseringen.

12.1 Fritt fall

Här kommer ett rigoröst bevis för att utfört arbete = Δ kinetisk energi (under fritt fall). En definition av den totala kraften $\mathbf{F}$ samt ett hjälplemma krävs för beviset.

Definition

$\mathbf{F} = \Sigma$ av alla krafter i universum som påverkar partikeln.

Under resten av avsnitt 12 kommer vi använda definitionen ovan av $\mathbf{F}$ som notation likaväl som den notation som redogörs i underavsnittet 6.1.1

Hjälplemma

Låt $u(t), v(t)$ vara C^1 kurvor, då gäller $\frac{d}{dt}(u(t)v(t)) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ (pga. produktregeln).

Bevis

$u(t)v(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t)u_i(t)$ (n = dimensionen av u och v) $\Rightarrow \frac{d}{dt}(uv) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(u_i v_i) =$ (produktregeln) $\sum_{i=1}^n (u'_i v_i + u_i v'_i) = u'v + uv'$.

Q.E.D.

Bevis av påståendet om utfört arbete

Låt oss acceptera Newtons 2:a lag utan rigoröst bevis ($\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{r}''$) kommer utfört arbete $= \int_b^a m\mathbf{r}''(t)\mathbf{r}'(t)dt$. $\Rightarrow$ utfört arbete $= \int_b^a \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}(t))dt = \frac{m}{2} \int_b^a \frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}'(t)\|^2)dt = \frac{m}{2}(\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2) = \Delta$ kinetisk energi.

Q.E.D.

12.2 Keplers lag

Keplers lag lyder: om en partikel utför en centralrörelse är vinkelmomentum konstant. Innan bevis kan genomföras krävs ett hjälplemma och en definition.

Hjälplemma

Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 kurvor i $\mathbb{R}^3$ så kommer:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$$

Beviset utelämnas ty det togs ej upp under föreläsningen.

Definition

Under centralrörelse ges vinkelmomentet av $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{P}(t) = \mathbf{r}(t) \times (m\mathbf{r}'(t)) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t))$.

Bevis av Keplers lag

Enligt hjälplemmat, $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)) + (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)) = 0$ (ty första kryssprodukten = 0 av definition, i den andra kryssprodukten är vektorerna antiparallella ($\mathbf{r}(t)$ pekar från origo till partikeln och $\mathbf{r}''(t)$ pekar från partikeln in mot centrum) och därmed = 0).

13 Parametriserade ytor

För att kunna prata om parametriserade ytor krävs en definition. Den lyder:

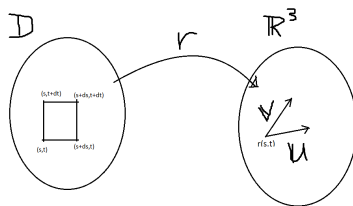
Definition

Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat kvadrerbart område, anta även att D är bågvisst sammanhängande. En C^1 -funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad C^1 -yta i $\mathbb{R}^n$ (vi fokuserar på $n = 3$).

13.1 Arean av en parametriserad yta

För att kunna härleda arean av en parametriserad yta krävs en generell yta. Vi gör parametriseringen med följande funktion:

$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($n = 3$ för att kunna visualisera. För bevis av det generella fallet n kan 3 bytas mot n) $(s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t) = (\mathbf{x}(s, t), \mathbf{y}(s, t), \mathbf{z}(s, t))$ (se figur 2) får man en parametriserad yta.



Figur 2: Du har en punkt (s, t) i $\mathbb{R}^2$ och gör en translation till $\mathbb{R}^3$ med funktionen $\mathbf{r}(s, t)$. Man gör samma sak med punkterna $(s + ds, t)$ och $(s, t + dt)$ och man skapar sedan vektorer till dessa från (s, t) och kallar dem $\mathbf{v}$ respektive $\mathbf{u}$.

Man kan se punkten $\mathbf{r}(s + ds, t)$ som $\mathbf{r}(s, t) + \frac{\mathbf{r}(s, t)}{\partial s} ds$. Därmed kan man också tänka den som en vektor $\mathbf{u}$ från punkten $\mathbf{r}(s, t)$ i riktningen $\frac{\mathbf{r}(s, t)}{\partial s}$ med längden ds . Motsvarande resonemang kan göras för punkten $\mathbf{r}(s, t + dt)$ som kan kallas vektor $\mathbf{v}$. Detta leder till att man kan tolka arean av den infinitesimala rektangeln vid (s, t) som att den blir, efter parametriseringen, ett parallelogram bildat av de två vektorerna och dess area kommer då att vara längden av kryssprodukten av vektorerna.

Den infinitesimala arean $dS = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| =$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \right\|$$

$$\Rightarrow dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Följaktligen blir den totala ytarean av en parametriserad yta =

$$\int_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt. \quad (21)$$