

Tavelpresentation Grupp 3D-2

Jesper Bergström, Jonathan Borsander, Amandus Reimer,
Fredrik Skoglund, Gabriel Vevang, Ruben Willner

February 2020

1 Introduktion

Här kommer en sammanfattning av samtliga föreläsningar i flervariabelsanalys under läsvecka 3.

2 Implicita funktionssatsen

Implicita funktionssatsen var det första som gicks igenom under läsveckan. Satsen används för att undersöka ifall en delmängd i en implicit funktion går att uttrycka med hjälp av en eller flera variabler.

2.1 Implicita funktionssatsen för $n + 1$ variabler

Låt $F(x, \dots, x_{n+1})$ vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion och $(a, \dots, a_{n+1})$ en punkt på nivåytan $F(x, \dots, x_{n+1}) = C$. Om $F_{x_{n+1}}(a, \dots, a_{n+1}) \neq 0$ då finns det en omgivning u av $(a, \dots, a_{n+1})$ s.a restriktionen av nivåytan till u implicit definerar en $\mathcal{C}^1$ -funktion $x_{n+1} = f(x, \dots, x_n)$. För derivatan gäller

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-F'_{x_i}}{F'_{x_{n+1}}} \quad (1)$$

2.1.1 Bevisidé

Satsen bevisades inte under läsveckan men följande bevisidé nämndes.

Givet en omgivning u , $F(x, y) = C$ och $y = f(x)$. Tänk variabelbytet $u = x$ och $v = f(x)$. Då ger kedjeregeln följande.

$$F(x, y) = F(u, v) = F(u(x), v(x)) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-F_u}{F_v} = \frac{-F_x}{F_y} \quad (2)$$

3 dubbelintegraler

Från tidigare kurs i envariabelanalys vet vi att integralen för en funktion $f(x)$ kan definieras som den tecknade arean mellan grafen och x -axeln. I en dubbelintegral går det att definiera den som den tecknade volymen mellan grafen $z = f(x, y)$ och arean D i xy -planet.

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (3)$$

Det går då att visualisera att $f(x, y)$ är höjden i z -led och $dx dy$ är infinitesimala rektanglar i xy -planet.

3.1 Beräkning av dubbelintegraler

Det finns flertalet olika sätt att beräkna dubbelintegraler, här nedan presenteras några av dessa.

3.1.1 Linjäritet

På grund av linjäritet uppfyller dubbelintegraler sambandet:

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy, \quad (4)$$

på precis samma sätt som singelintegraler kan delas upp.

3.1.2 Fubinis sats [för rektanglar]

Låt $f(x, y)$ vara kontinuerlig och låt Δ vara en rektangel:

$$\Delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (5)$$

Då gäller:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (6)$$

Det vill säga att det går att skiva upp den givna volymen på två olika sätt som ger samma resultat. Detta kan vara användbart eftersom att ibland är det väsentligt mycket enklare att utföra beräkningen av den ena än den andra.

3.1.3 Fubinis sats 2.0 [Sats 6.2.4]

Låt

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}, \quad (7)$$

där $\alpha(x), \beta(x)$ är kontinuerliga funktioner av x så att $\alpha(x) \leq \beta(x)$ för $x \in [a, b]$. Om $f(x, y)$ är kontinuerlig så gäller:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (8)$$

D sägs vara reguljärt i x -led. Ett reguljärt område är reguljärt i både x - och y -led, vilket ger 2 alternativa ordningar för integration. Detta utvidgar Fubinis sats tillämpningsområden till att även innefatta de fall där ett område begränsas av två funktioner, istället för endast då området är en rektangel.

3.1.4 Variabelbyten i dubbelintegraler [Sats 6.4.6]

Låt $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ vara en bijektiv $\mathcal{C}^1$ -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet sådan att $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ i E . Då är:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (9)$$

där $|J(u, v)|$ är determinanten av den så kallade Jacobimatrizen eller funktionalmatrisen där elementen är partialderivatorna av de ursprungliga variablerna med avseende på variabelbytet. Den kan alltså i detta bytet skrivas som $\left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right|$ och definieras genom,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Vid variabelbyte i dubbelintegral måste alltså funktionen med avseende på de nya variablerna multipliceras med denna determinant för att integration ska bli korrekt. Rent allmänt gäller följande,

$$dxdy = \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv. \quad (11)$$

En notis är att determinanten för funktionalmatrisen måste vara nollskild för att variabelbytet ska kunna utföras. Determinanten är även inverterbar och följande samband gäller,

$$\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|^{-1} = \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right|, \quad (12)$$

vilket underlättar i vissa beräkningar då det är lättare att hitta den inverterade determinanten för variabelbytet.

Exempel på vanliga variabelbyten innefattar bl.a. cartesiska till polära eller elliptiskt polära koordinater. Bytet mellan cartesiska och polära definieras genom $x = r \cdot \cos(\theta)$ och $y = r \cdot \sin(\theta)$ och determinanten för funktionalmatrisen,

$$\left| \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} \right|, \quad (13)$$

antar värdet r . De tillfällen då detta variabelbyte vill utföras är exemplvis då området D som integreras över har uppställningen,

$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad (14)$$

där $a \in \mathbb{R}$.

Bytet mellan cartesiska och elliptiskt polära koordinater definieras genom $x = r\alpha \cdot \cos(\theta)$ och $y = r\beta \cdot \sin(\theta)$. Här blir determinanten för funktionalmatrisen lika med $\alpha\beta r$. Detta bytet kan istället vilja tillämpas då området D definieras som,

$$D = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leq \gamma^2 \right\}, \quad (15)$$

där $\gamma \in \mathbb{R}$.

3.1.5 dubbelintegraler med hjälp av nivåkurvor

På detta ämne berördes en sats som beskriver omskrivningen av en dubbelintegral då följande krav gäller.

$$\begin{aligned} &\text{Låt } g : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R} \text{ vara } \mathcal{C}^1, \quad h : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \text{ vara } \mathcal{C}^0 \\ &D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ kvadrerbart och antag att } a \leq g(x,y) \leq b, \quad \forall (x,y) \in D \\ &\text{sätt } A(u) = \text{Area}\{(x,y) \in D | g(x,y) = u\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Då gäller att

$$\iint_D h(g(x,y)) dxdy = \int_a^b h(u) \cdot A'(u) du. \quad (17)$$

Satsen kan enkelt beskrivas som om området man integrerar över effektivt skivas upp i plan med infinit liten höjd som sedan adderas ihop.

3.2 Generaliserade dubbelintegraler

Det finns, likt för en variabel, två sorters generaliserade dubbelintegraler. Den ena sorten är när man integrerar en funktion som är obegränsad på det område man integrerar över, ett exempel på detta från en variabel är

$$\int_0^1 x^t dx \quad (18)$$

för $t < 0$.

Den andra är när området man integrerar över är obegränsat, ett exempel på detta från en variabel är

$$\int_1^\infty x^t dx. \quad (19)$$

För att lösa dessa sorters dubbelintegraler inför man gränsvärden för integralgränserna.

3.2.1 Gauss sats

Ett intressant exempel där man använder generaliserade dubbelintegraler är för att bevisa Gauss sats som säger,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (20)$$

där e^{-x^2} är en funktion som saknar primitiv funktion. Beviset för den här satsen går ut på att man låter $I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ vilket ger att $I^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. Efter variabelbyte till polära koordinater får man att $I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$ vilket bevisar satsen.

3.3 Definitioner

3.3.1 Hjälpdefinitioner

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sådana att $a \leq c$ och $b \leq d$. Mängden $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ som ges av $\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\}$ kallas då en axelparallell rektangel (alternativ notation $\Delta = [a, c] \times [b, d]$). Här kan sedan x- och y-intervallen för denna axelparallella rektangel delas in i partitioner enligt $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$ och $b = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ vilket delar in Δ i ett antal delrektanglar.

3.3.2 Definition av trappfunktioner och dess dubbelintegraler

Givet en axelparallell rektangel $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ samt partitionerna $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$ och $b = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ ges en funktion $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ dubbelintegral av $\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})C_{ij}$, där C_{ij} är Φ 's konstanta värde på den ij :te delrektangeln $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Φ sägs vara en trappfunktion på Δ om den har ett konstant värde på varje delrektangel i Δ .

3.3.3 Definition av integrerbarhet

Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. f sägs vara integrerbar över Δ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns två trappfunktioner Φ och Ψ på Δ sådana att:

$$1) \Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta \quad (21)$$

$$2) \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy < \varepsilon \quad (22)$$

3.4 Sats 6.1.3

Sats 6.1.3 var det sista som gicks igenom under läsveckan. Satsen är inte jättelång, men beviset är långt och någorlunda krångligt. Låt $\Delta = [a, c] \times [b, d]$ vara en axelparallell rektangel. Antag att $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Då gäller att:

1) f är integrerbar över Δ

$$2) \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^c \left(\int_b^d f(x, y) dy \right) dx = \int_b^d \left(\int_a^c f(x, y) dx \right) dy \quad (23)$$

För att bevisa satsen så använde vi oss av tre lemmen.

Det första lemmat säger att om vi har en kontinuerlig funktion f på en kompakt mängd $K \subseteq \mathbb{R}^n$ så är f likformigt kontinuerlig på K .

Likformig konvergens är ett begrepp som vi stött på i tidigare kurser. Likformig kontinuitet definieras väldigt likt.

Definitionen av likformig kontinuitet är som följer:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in K \wedge \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \varepsilon,$$

d.v.s. om vi för alla epsilon större än noll kan hitta ett delta större än noll som leder till att, givet att avståndet mellan två punkter är mindre än delta, beloppet av skillnaden i funktionsvärden av dessa punkter blir mindre än epsilon.

Lemma nummer två säger att om vi har $\Delta = [a, c] \times [b, d]$, $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, och f är kontinuerlig, så existerar de uppdelade integralerna $\int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx) dy$ och $\int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx$.

Det sista lemmat som användes i beviset av satsen säger att om vi har en trappfunktion på samma område som ovan, $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ så gäller del två av sats 6.1.3, d.v.s ekvation (22), för Φ .

Detta lemma är såpass simpelt att vi utelämnade beviset för det, men tanken är att eftersom Φ är en trappfunktion kan vi se dubbelintegralen av funktionen som volymen av ett stort rutnät av rätblock. Då är det hyfsat uppenbart att volymen inte ändras om vi räknar rätblockens volym först i x-led och sedan i y-led, eller vice versa.