

# Sammanfattning Flervariabelanalys Lv 4 och 5

Erik Broback, Emil Ellénus, Tim Johansson  
Gottfrid Olsson, Elina Ryding & Mijo Thoresson

Mars 2020

## 1 Integration över allmänna områden

För att integrera över allmänna områden, det vill säga områden som inte är axelparallella rektanglar, kan man använda nollutvidgning för att fortfarande kunna integrera över en axelparallell rektangel.

**Definition.** Låt  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  vara begränsad. För en supermängd  $D^* \supseteq D$  och en funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definieras nollutvidgningen av  $f$  till  $D^*$  som funktionen  $f^* : D^* \rightarrow \mathbb{R}$  där

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{då } \mathbf{x} \in D \\ 0, & \text{då } \mathbf{x} \in D^* \setminus D \end{cases}$$

$f$  sägs vara integrerbar på  $D$  om  $\exists$  axelparallell rektangel  $\Delta \supseteq D$  så att nollutvidgningen av  $f$  till  $\Delta$  är integrerbar över  $\Delta$ .

**Definition.** En mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  sägs vara en nollmängd om det  $\forall \epsilon > 0$  finns ändligt många axelparallella rektanglar:  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  så att  $\sum_{i=1}^n \text{Area}(\Delta_i) < \epsilon$ .

En nollmängd är således en mängd utan area.

**Definition.** En mängd  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  sägs vara kvadrerbar om dess rand,  $\partial D$ , är en nollmängd.

Vilket innebär att en kvadrerbar mängd är en mängd vars rand saknar area.

**Sats** Om  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  är en begränsad och kvadrerbar mängd, och  $f$  är en kontinuerlig funktion i två variabler, så är  $f$  integrerbar över  $D$ .

Om en dubbelintegrals ena variabel kan uttryckas mellan två funktioner av den andra variabeln, så kan följande sats användas.

**Sats** Låt  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ , där  $\alpha(x)$  och  $\beta(x)$  är kontinuerliga funktioner, samt låt  $f$  vara en funktion i två variabler.

Då gäller:

(1)  $D$  är kvadrerbar

(2) Om  $f$  är kontinuerlig, så är  $f$  integrerbar över  $D$  och Fubinis sats gäller

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

Observera att det vid användning av ovanstående sats är av stor betydelse vilken variabel som det integreras över först. Det vill säga att integralen vars gränser är uttryckta i funktioner av en variabel måste beräknas innanför integralen vars gränser är konstanta.

## 2 Integration i högre dimensioner

Nedan presenteras satser och definitioner gällande trippelintegraler och dess tillämpningar för volymberäkningar samt massberäkningar. De flesta av dessa

satser och begränsningar kan utökas till högre dimensioner.

## 2.1 Trippelintegraler

En trippelintegral kan användas för att beräkna en volym i rummet.

**Definition.**  $\iiint_D dx dy dz$  är volymen av kroppen  $D$ .

Om området  $D$  begränsas av två funktioner,  $D = \{(x, y, z) | (x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ \& } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ , kan integralen skrivas om till en dubbelintegral.

$$\iiint_D dx dy dz = \iint_E \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} dz dx dy \quad (1)$$

Där  $E$  är projektionen av  $D$  på  $xy$ -planet.

För trippelintegraler är koordinatbyte till cylindriska och sfäriska koordinater särskilt viktiga.

**Definition.** Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

$$dx dy dz = r dr d\phi dz$$

**Definition.** Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\phi d\theta$$

## 2.2 Volymberäkningar

**Definition.** Den  $n$ -dimensionella enhetstetraedern  $T_n$  ges av

$T_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \forall i, (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq 1\}$ . Volymen av  $T_n$ :

$$\text{Vol}(T_n) = \iiint_{T_n} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{1}{n!} \quad (2)$$

Om detta tillämpas för  $n = 3$ , så gäller att  $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$  vilket man övertygar sig om genom att rita upp både enhetstetraedern och enhetskuben i  $\mathbb{R}^3$ .

**Sats : Volym av enhetsklot i  $\mathbb{R}^n$**

Låt  $B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ , det vill säga enhetsklotet i  $\mathbb{R}^n$ . Låt  $\mu_n$  beteckna volymen av  $B_n$ . Då gäller:  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = \pi$  och  $\mu_n = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu_{n-2}$ .

*Bevis.* Att  $\mu_1 = 2$  och  $\mu_2 = \pi$  ses lätt med enkel uträkning. Vi låter framöver  $n \geq 3$ . Vi börjar med att notera att  $\mathbf{x} \in B_n \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| \leq 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \Leftrightarrow x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \int_{B_n} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{B_{n-2}} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n-2} \iint_{x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2} dx_{n-1} dx_n \quad (3) \\ &= \pi \int_{B_{n-2}} \dots \int \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\right) dx_1 \dots dx_{n-2} \end{aligned}$$

Låt  $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$  och  $h(u) = 1 - u^2$ . Notera att vi då kan skriva  $B_{n-2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 0 \leq g \leq 1\}$  vilket ger att integralen blir  $\int_0^1 h(u) \cdot V'(u) du$ . Där  $V(u) = \text{vol}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 0 \leq g \leq u\}$  är volymen av ett  $(n-2)$ -dimensionellt

klot med radie  $u = \mu_{n-2} \cdot u^{n-2}$ .

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu_n \\
&= \pi \int_0^1 (1-u^2)(n-2)\mu_{n-2}u^{n-3} du \\
&= \pi(n-2)\mu_{n-2} \int_0^1 (1-u^2)u^{n-3} du \\
&= \pi(n-2)\mu_{n-2} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \pi(n-2)\mu_{n-2} \frac{2}{(n-2)n} \\
&= \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}
\end{aligned} \tag{4}$$

□

**Sats : Area av enhetssfär**

Låt  $A_n$  beteckna arean av enhetssfären,  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ , i  $\mathbb{R}^n$ . Då gäller att  $A_n = n \cdot \mu_n$ .

## 2.3 Masscentrum

**Definition.** En kropp som upptar området  $K$  i rummet med varierande densitet  $\rho(x, y, z)$  har massan  $m = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz$ . Kroppens masscentrum är  $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$  där

$$m_x = \frac{\iiint_K x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz}. \tag{5}$$

Uttrycken för  $m_y$  och  $m_z$  följer analogt.

Uttrycket  $\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz$  betecknar total massa av kroppen  $K$ . Alltså beräknas masscentrum som ett slags medelvärde.

**Definition.** En funktion  $f(x, y, z)$  har medelvärde

$$\bar{f}_K = \frac{\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K dx \, dy \, dz} \quad (6)$$

på området  $K$ .

Samma princip används i förgående definition för att bestämma masscentrum. Först fås funktionens volymelement som sedan divideras bort, vilket ger medelvärdet.

**Definition.** Låt  $z \in \mathbb{C}$ . Gammafunktionen är då:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt \quad (7)$$

En väsentlig egenskap gammafunktionen har är att  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

### 3 Parametrisering av kurvor

**Definition.**

Låt  $n \in \mathbb{N}$  och  $a < b \in \mathbb{R}$ . En kontinuerlig funktion  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  kallas för en parametriserad orienterad kurva i  $\mathbb{R}^n$ .

Som exempel betraktar vi en rät kurva  $\gamma$  från startpunkt  $(0, 0)$  till slutpunkt  $(1, 2)$  i planet. En parametrisering som beskriver  $\gamma$  är exempelvis  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$ , där  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Vi ser att  $n = 2$  ty kurvan ligger i planet. Observera både att  $t$  är en *parameter* och att kurvans *orientering* är specificerad (riktning från start- till slutpunkten), varför kurvan kallas parametriserad respektive orienterad.

**Definition.** Givet en parametrisering  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  av en kurva och låt  $t \in [a, b]$ . Då definieras:

- (i) Hastigheten vid tiden  $t$  som  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ .
- (ii) Farten vid tiden  $t$  som  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ .
- (iii) Acceleration vid tiden  $t$  som  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ .

För att dessa definitioner skall vara rigorösa krävs det att  $\mathbf{r}$  är (minst) en  $\mathcal{C}^1$ - och  $\mathcal{C}^2$ -kurva för hastighet och fart respektive acceleration.

**Definition.** Låt  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en parametrisering av en  $\mathcal{C}^1$ -kurva  $\gamma$ . Längden  $L$  av kurvan  $\gamma$  är definierad som

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (8)$$

Notera att kurvans längd är oberoende av parametriseringen.

## 4 Vektorfält och kurvintegraler

**Definition.** Låt  $n \in \mathbb{N}$ . Den vektorvärda funktionen  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kallas då för ett  $n$ -dimensionellt vektorfält.

Ett vektorfält innebär att varje punkt i rummet  $\mathbb{R}^n$  associeras med en  $n$ -dimensionell vektor. Då  $n = 3$  kan funktionen  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  betraktas som ett kraftfält (exempelvis ett gravitationellt eller magnetiskt fält).

**Definition.** En funktion  $f$  av  $n$  variabler,  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , kallas för ett skalärfält.

Ett exempel på skalärfält är en topologisk karta ( $n = 2$ ). Vi kan tänka oss att varje punkt är associerat med ett tal som beskriver punktens höjd över havsnivå.

**Definition.** Låt  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$  vara en  $\mathcal{C}^1$ -kurva i  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  vara ett  $\mathcal{C}^0$ -vektorfält. Kurvintegralen av vektorfältet  $\mathbf{F}$  längs kurvan  $\gamma$  ges då av integralen

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (9)$$

Kurvintegralen kan, i  $n = 3$ , tolkas som den integral som beräknar utfört arbete då en partikel förflyttar sig längs kurvan  $\gamma$  under påverkan av kraften  $\mathbf{F}$ .

**Lemma.** Låt  $\mathbf{u}(t)$  och  $\mathbf{v}(t)$  vara  $\mathcal{C}^1$ -kurvor. Då gäller:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \right) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \quad (10)$$

**Lemma.** Låt  $\mathbf{u}(t)$  och  $\mathbf{v}(t)$  vara  $\mathcal{C}^1$ -kurvor i  $\mathbb{R}^3$ . Då gäller:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) \right) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) \quad (11)$$

## 5 Fysik

Med hjälp av de två lemmorna i avsnitt 4 kan några fysikaliska satser härledas, vilka presenteras nedan.

**Sats** Under fritt fall gäller att det utförda arbetet är lika med förändringen av kinetisk energi, det vill säga:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \frac{1}{2}m \|\dot{\mathbf{r}}(b)\|^2 - \frac{1}{2}m \|\dot{\mathbf{r}}(a)\|^2 \quad (12)$$

där  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$  enligt Newtons andra lag.

**Definition.** Rörelsemängdsmoment ges av  $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t))$ , där  $\mathbf{p}(t)$  är rörelsemängden.

**Sats** Keplers lag: Om en partikel utför en centralrörelse så gäller att rörelsemängdsmomentet är konstant, det vill säga:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)) = 0 \quad (13)$$

## 6 Ytor

Nedan ges en definition för en parametriserad yta. Observera att det även kan antas att området  $D$  är bägvis sammanhängande.

**Definition.** Låt  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  vara ett begränsat kvadrerbart område. En  $\mathcal{C}^1$ -funktion  $\mathbf{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$  kallas för en parametriserad  $\mathcal{C}^1$ -yta i  $\mathbb{R}^n$ .

Vidare kan arean av en parametriserad yta beräknas, vilket främst är användbart då  $n = 3$ . Detta görs genom beräkning av ytans infinitesimala area, samt integration av denne över området  $D$ .

**Sats**

Låt  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  så att  $\mathbf{r}(s, t) = \left( x(s, t), y(s, t), z(s, t) \right)$ . Eftersom den infinitesimala arean av denna yta i  $\mathbb{R}^3$  är  $dA = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt$  får vi att total ytarea är:

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt \quad (14)$$