

Sammnafattning LV6 Flervariabelanalys

Simon Carlson
Hamza Jasarevic
Masoud Shaker
Rani Alsaberi

21 mars 2020

1 Kurvintegraler

1.1 Definition

Låt $n \subseteq \mathbb{N}$, $r : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ en orienterad C^1 -kurva och $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ett C^1 vektorfält. Då definieras kurvintegralen av $\mathbb{F}$ längs kurvan enligt

$$\int_a^b \mathbb{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt \quad (1)$$

där

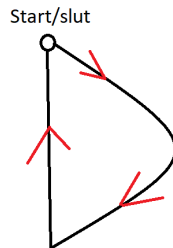
$$\mathbb{F}(r) = (P(r), Q(r)) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (2)$$

$$r = r(t) = (x(t), y(t)) \quad (3)$$

$$a \leq t \leq b. \quad (4)$$

Denna kurvintegral betecknas med $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot dr$ eller $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$.

Notation: Om en viss kurvas begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller kallas den för sluten. I detta fall är beteckningen $\oint$. Om en sluten kurva sedan inte skär sig själv är den även enkel. Av detta följer en definition för positiv orientering gällande en viss kurva.



En enkel och sluten kurva.

1.2 Positiv orientering

DEFINITION: Låt γ vara en enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Denna kurva sägs vara positivt orienterad om insidan till γ alltid ligger till vänster om kurvan då kurvans riktning följs. På ett enkelt sätt sägs att positiv orientering motsvarar en riktning som går moturs.

Det som också är viktigt att nämna är så kallad *Jordans kurvsats*. Satsen upplyser om indelning av ett plan som innehåller en viss kurva. Mer specifikt handlar det om att en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ delar in $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ i precis två sammanhängande områden.

Givet en enkel sluten kurva γ kan man alltså beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot dr$ som i sin tur kan räknas ut på två olika sätt. Visserligen kan kurvintegralen fås då hela kurvan γ delas in i små bitar så att

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n. \quad (5)$$

I sådana fall kan kurvaintegralen beräknas som

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot dr = \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot dr + \dots + \int_{\gamma_n} \mathbb{F} \cdot dr. \quad (6)$$

Med tanke på att detta beräkningssätt tar lång tid kan ett annat sätt som är kortare och mer effektivt användas. Det som används för beräkning av kurvintegraler i detta fall kallas för *Greens sats*.

För att kunna använda den här satsen måste två villkor uppfyllas. Nämligen handlar det om att en viss kurva γ måste vara både sluten och positivt orienterad.

DEFINITION: Låt P och Q vara två C^1 - funktioner definierade i en öppen mängd ω i planet. Om det kompakta delområdet D av ω har en rand ∂D som utgöres av en eller flera styckvis C^1 - kurvor och som är positivt så är

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (7)$$

2 Greens sats

2.1 Definition

Det begränsade och kvadererbara området $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara reguljärt i x -led om D kan partitioneras i ändligt många områden $D_1, \dots, D_n$ på formen:

$$D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$$

där $\alpha_i(x)$ och $\beta_i(x)$ är C^0 -kurvor och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$ för $x \in [a_i, b_i]$. Reguljäritet i y -led visad analogt. D sägs vara reguljärt om D är reguljär i både x - och y -led.

Bevis. Greens sats bevisas i tre steg. I Steg (i) antar vi att $D = \cup_{i=1}^n D_i$ där $D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$. Sedan visar vi att $\forall y$ gäller

$$\oint_{\partial D_i} P dx = \iint_{D_i} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy \quad (8)$$

genom användning av Fubinis sats.

I steg (ii) härleder vi att, om D är reguljärt i x -led så är

$$\oint_{\partial D} P dx = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy. \quad (9)$$

Med $D = \cup_{i=1}^n D_i$ som i steg (i) så vet vi att ekv (8) gäller för varje i vilket ger

$$\overbrace{\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx}^{\text{visas m.h.a en bild vara = VL i (9)}} = \overbrace{\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy}^{\text{trivialt = HL i (9)}} \quad (10)$$

Vi har nu kommit till steg (iii). Vi vet från steg ii att, om D är reguljärt i x -led så gäller (9). På samma vis kan vi visa att, om D är reguljärt i y -led så är

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dy dx. \quad (11)$$

Så båda ekvationerna gäller om D är reguljärt $\implies$ addera $\implies$

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy. \quad (12)$$

□

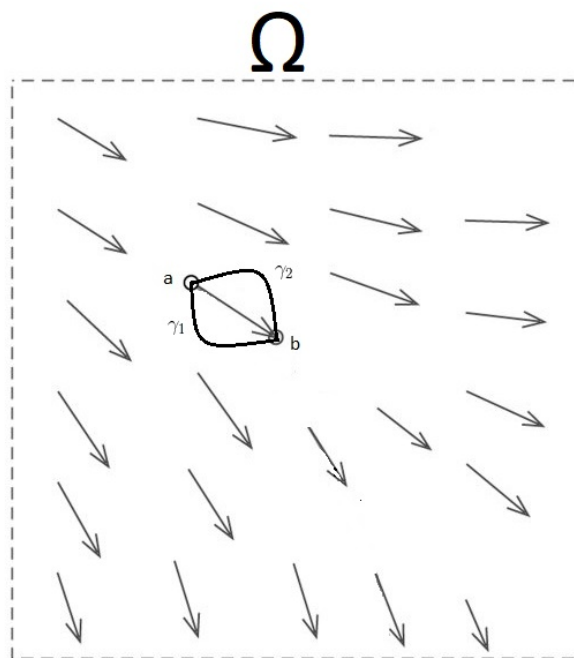
3 Potential och konservativa fält

3.1 Definition

Ett vektorfält $\mathbb{F}(P, Q)$ i en öppen mängd Ω sägs vara konservativ om det existerar en C^1 -funktion $U(x, y)$ sådana att $\text{grad}(U) = (P, Q)$, det vill säga $(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}) = (P, Q) = \mathbb{F}$. Funktionen U kallas då för en potential till $\mathbb{F}$.

Potentialen till ett konservativt fält är uppenbarligen inte entydigt bestämd ty om U är en potential till $\mathbb{F}$ så är även $\mathbb{F} + C$, där C är en konstant. Detta gäller eftersom $\text{grad}(U + C) = \text{grad}(U)$.

Det som är speciellt med konservativa fält är att kurvintegralen är vägoberoande. Det vill säga att en kurvintegral i mängden Ω beror på endast begynnelse- samt slutpunkt. Ett ekvivalent villkor är att kurvintegralen längs varje sluten kurva i Ω är noll.



Kurvintegralen är densamma längs γ_1 och γ_2 .

Sats:

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot dr = U(b) - U(a) \quad (13)$$

Där a samt b är start- och slutpunkter för en kurva γ .

Bevis. Låt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ och $t \in [\alpha, \beta]$ vara en parametrisering av γ . Definiera också

$$\mathbf{r}(\alpha) = a, \quad \mathbf{r}(\beta) = b. \quad (14)$$

Enligt kedjeregeln är

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}(t)) = \text{grad } U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

Alltså har vi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}U(\mathbf{r}(t)) dt = U(\mathbf{r}(\beta)) - U(\mathbf{r}(\alpha)) = U(b) - U(a)$$

□

4 Gauss' sats (Divergenssats)

4.1 Definition.

Gauss sats är således en konserveringslag som innebär att volymen av det totala flödet. Faktiskt är Gauss sats ett specialfall av Stokes sats, vilken är en generalisering av analysens fundamentalsats. I alla fall kan man definiera Gauss sats som

4.2 Formell beskrivning.

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd Ω i rummet. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand som består av en eller flera C^1 -ytor och som är orienterat med utåtriktad normal så gäller

$$\int \int \int_K \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{N} dS$$

Alltså säger divergenssatsen att flödet av $\mathbf{u}$ ut ur området K är lika med volymenintegralen av divergensen av $\mathbf{u}$.

4.3 Tillämpningar.

Som ett resultat av divergenssatsen kan en mängd fysiska lagar skrivas både i en differentiell form och en integrerad form, några exempel är Gauss lag och Maxwells ekvationer. Kontinuitetsekvationer är ett annat exempel på tillämpningar, dessa används inom fluidmekanik, kvantmekanik, elektromagnetism med mera. Vidare säger divergenssatsen att varje sådan kontinuitetsekvation kan skrivas i en differentiell form (i termer av en divergens) och en integrerad form (i form av ett flöde).