Rapport tavelpresentation

6 mars 2020

Gerda Johansson

Ronja Hedberg

Erik Redmo

Ester Hagström

Lucas Svensson

1 Greens sats i planet

För att förstå och hantera behandlingen av kurvor krävs ett par fundamentala definitioner.

Definition av sluten, enkel kurva

Låt γ=$\{\vec{r}(t)|a \leq t \leq b\}$ vara en parametriserad kurva. γ sägs vara sluten om $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. γ sägs vara enkel om $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ då $a \leq t_1 < t_2 < b$.

Jordans kurvsats

Låt γ vara en enkel, sluten C^0-kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Dessa kallas för kurvans insida respektive utsida.

Definition av positivt/negativt orienterad kurva

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område vars rand ∂D består av en eller fler C^1-kurvor. ∂D sägs vara positivt orienterad om D ligger till vänster om färdriktningen, och negativt om D ligger till höger.

När det kommer till kurvintegraler i $\mathbb{R}^2$ är Greens formel den mest centrala av satserna. För någorlunda okomplicerade områden D i planet kan dess rand ∂D tolkas som en styckvis kontinuerlig kurva. Följande formel ger ett samband mellan kurvintegralen över en positivt orienterad rand av ett område och områdets area.

Sats 9.2.1

Låt P och Q vara C^1-funktioner, definerade i en öppen mängd $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Om det kompakta området D $\in \Omega$ har en positivt orienterad rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis

C^1 kurvor så gäller

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{1}$$

En av konsekvenserna som följer denna sats är att om $\vec{F} = (P, Q)$ är ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^2$ och γ är en enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ så ger Jordans kurvsats att γ innesluter ett sammanhängande område D sådant att $\gamma = \partial D$. Greens sats kan tillämpas så länge $\vec{F}$ är C^1 i hela D, särskilt fås att om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \tag{2}$$

Greens sats kan också användas till att utföra areaberäkningar. Sätt $P = 0$ och $Q = x$. Alternativt kan P sättas till $-y$ och Q till noll. Dessa två sätt medför

$$\oint_{\partial D} x\,dy = Area(D), \;\; respektive \;\; -\oint_{\partial D} y\,dx = Area(D). \tag{3}$$

Det går dessutom att använda den konvexa kombinationen,

$$Area(D) = \lambda \oint_{\partial D} x\,dy - (1-\lambda) \oint_{\partial D} y\,dx, \quad där \;\; 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{4}$$

Bevisidé av Greens sats för reguljära områden

Beviset av Greens sats kräver först och främst en definition av reguljära områden.

Det begränsade, kvadrerbara området $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara reguljärt i x-led, om D kan partitioneras i ändligt många områden D_i. $D_i = \{(x,y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$, där $\alpha_i(x), \beta_i(x) \in C^0$ och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$ $\forall x \in [a_i, b_i]$.

Reguljärt i y-led definieras på analogt sätt. D sägs vara reguljärt om D är reguljärt i både x- och y-led.

Härifrån kan själva bevisidén framställas.

Antag att $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, där $D_i = \{(x,y)|a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$. Beviset delas härefter upp i tre steg.

Steg 1: Visa att för varje i gäller

$$\oint_{\partial D_i} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy. \tag{5}$$

Idén här är att först skriva om högerledet med hjälp av Fubinis sats. Detta är möjligt, ty y är begränsad av $\alpha_i(x)$ och $\beta_i(x)$, som är funktioner av x. Sedan förenklas uttrycket för vänsterledet genom att genomlöpa den slutna kurvan med positiv orientering. Tack vare dessa två omskrivningar är det möjligt att visa likhet mellan högerled och vänsterled.

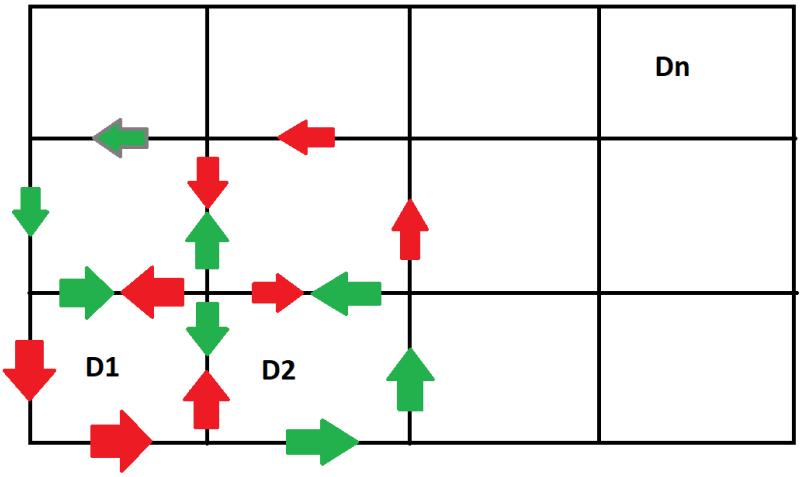
Steg 2: Härleda att om D är reguljärt i x-led, så implicerar det att

$$\oint_{\partial D} P\,dx = \iint_{D} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy. \tag{6}$$

Med samma område D som tidigare vet vi att

$$\oint_{\partial D_i} P\,dx = \iint_{D_i} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \oint_{\partial D_i} P\,dx = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy. \tag{7}$$

Det följer trivialt att summan i högerledet i ekvation 7 är lika med högerledet i ekvation 6. Däremot måste det bevisas att summan i vänsterledet i ekvation 7 är lika med vänsterledet i ekvation 6. Detta görs lättast med ett bildbevis, där området D ritas upp som en rektangel, som i sin tur delas upp i de mindre områdena D_i.



Figur 1: *Bildbevis över att de inre kurvintegralerna runt områdena D_i tar ut varandra.*

Randen till varje område D_1,...,D_n genomlöps med positiv orientering. Tydligen kancelleras kurvintegralerna längs de inre sidorna och endast kurvintegralen längs den stora rektangeln (området D) återstår, vilket kan ses i figur 1. Detta bevisar det som skulle bevisas i steg 2.

Steg 3: Härleda att om D är reguljärt i y-led, så implicerar det att

$$\oint_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{8}$$

Detta görs på analogt vis sett till steg 2.

Nu återstår endast att addera resultatet i steg 2 och steg 3. Detta ger oss:

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{9}$$

Beviset är härmed färdigt.

Definition: Konservativt fält och potential

Ett n-dimensionellt vektorfält $\vec{F}$:$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kallas för konservativt om det finns ett skalärfält Φ:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sådant att

$\vec{F} = \nabla\Phi$.

Φ kallas för en potential till $\vec{F}$ och är unik upp till en konstant.

Sats 9.4.2 Låt $\vec{F}$:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett potentialfält med potential Φ i det öppna området Ω. För varje C^1-kurva γ i Ω gäller:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) \tag{10}$$

där $\vec{a}$ är kurvan γ:s startpunkt och $\vec{b}$ slutpunkt.

Fysikalisk tolkning av Sats 9.4.2

Likheten

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) \tag{11}$$

kan ses och användas för att beräkna likheten Utfört arbete = förändring i potentiell energi.

Korrolarium av Sats 9.4.2

Under samma hypoteser som i sats 9.4.2 gäller:

1. Om γ är en sluten kurva så är $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

2. Kurvintegralen för $\vec{F}$ är oberoende av väg, det vill säga om γ_1 och γ_2 har samma start- och slutpunkt så gäller:

$$\oint_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{12}$$

Sats 9.4.3

Låt $\vec{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i den bågvis sammanhängande öppna mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Om $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i Ω så finns det ett skalärfält Φ sådant att $\vec{F} = \nabla\Phi$.

Definition: Virvelfritt

Om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ sägs ett C^1-fält $\vec{F} = (P, Q) \in \mathbb{R}^2$ vara virvelfritt.

Greens sats kan även visa att ett kraftfält inte utför något arbete längs en kurva i planet. Om $\vec{F}$ är ett C^1-kraftfält är följande villkor tillräckligt för att visa att $\vec{F}$ inte utför något arbete längs en enkel, sluten kurva γ i $\mathbb{R}^2$:

(i) $\vec{F}$ är definierad och C^1 på hela insidan till γ

(ii) Om $\vec{F} = (P, Q)$ så är $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Definition: Enkelt sammanhängande mängder

En mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ sägs vara enkelt sammanhängande om

(i) Ω är bågvis sammanhängande

(ii) För varje enkel, sluten kurva γ i Ω ligger hela insidan till γ inom Ω.

Sats 9.4.5

Om $\vec{F} = (P,Q)$ är C^1 och uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i det enkelt sammanhängande området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ så har $\vec{F}$ en potential i Ω.

Bevis

Enligt sats 9.4.3 så räcker det att visa att $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje enkel, sluten γ i Ω. Men Ω är enkelt sammanhängande så insidan till γ tillhör Ω, vi kan alltså använda Greens sats vilket ger att

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{ins(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0 \tag{13}$$

per hypotes.

Sats

Låt $\vec{F}$ och $\vec{B}$ vara ett virvelfria vektorfält i $\mathbb{R}^2 \backslash \{0{,}0\}$. Då finns en konstant c $\in \mathbb{R}$ så att $\vec{F} - c\vec{B}$ är konservativt.

2 Övergång från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$

Låt $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett tredimensionellt C^1-vektorfält, för de kommande två definitionerna.

Definition: Divergensen av $\vec{F}$

Divergensen av F är ett skalärfält som ges av

$$div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F3}{\partial z}. \tag{14}$$

Definition: Rotationen av $\vec{F}$

Rotationen av $\vec{F}$ är ett vektorfärlt som ges av

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \tag{15}$$

3 Två omformuleringar av Greens sats

Första omformuleringen

Betrakta D som en yta i $\mathbb{R}^3$, dvs som en del av xy-planet i $\mathbb{R}^3$. Se $\vec{F}$ som ett tredimensionellt fält genom att ansätta $F_3 = 0$. $Rot(\vec{F})$ ger då

$$\nabla \times \vec{F} = \left(0{,}0{,}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k} \Rightarrow (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \tag{16}$$

$\hat{k}$ kan skrivas som $\hat{N}$, eftersom att $\hat{k}$ är normal till xy-planet och därmed till D. Detta implicerar att vi kan skriva om Greens sats på följande sätt:

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{N} dS. \tag{17}$$

Vi vet nu att detta gäller för en yta i $\mathbb{R}^3$ som ligger i ett plan. Stokes sats generaliserar det till ett godtyckligt C^1-stycke i $\mathbb{R}^3$

Andra omformuleringen

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \tag{18}$$

Vi definierar ett nytt fält $\vec{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ enligt $(G_1, G_2) = (F_2, -F_1)$. Betrakta $\vec{G}$ som ett fält i $\mathbb{R}^3$ genom att ansätta $G_3 = 0$. Högerledet blir då:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{G} \tag{19}$$

. Om vi låter D^* vara en cylinder i $\mathbb{R}^3$ med tvärsnitt D och höjd 1.

$$\Rightarrow \oiint_{\partial D} \left(\nabla \cdot \vec{G}\right) dxdy = \iiint_{D^*} \left(\nabla \cdot \ \vec{G}\right) dxdydz \tag{20}$$

.

Vänsterledet:

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \oint_{\partial D} -G_2 dx + G_1 dy = \oint_{\partial D} (G_1,G_2) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} \vec{G} \cdot \hat{N} ds \quad (21)$$

där ds är längdelementet och $\hat{N}$ är en normalvektor som pekar ut från D.

Men

$$\oint_{\partial D} \vec{G} \cdot \hat{N} dS = \oiint_{\partial D^*} \vec{G} \cdot \hat{N} dS \quad (22)$$

där ∂D^* är randen till cylindern D^*, och $\hat{N}$ är en enhetsnormal som alltid pekar ut från cylindern. Så vi har att

$$\oiint_{\partial D^*} \vec{G} \cdot \hat{N} dS = \oiint_{\partial D} \left(\nabla \cdot \vec{G}\right) dV \quad (23)$$

gäller åtminstone för en cylinder kring z-axeln, och ett fält $\vec{G}$ med $G_3 = 0$. Här är $\hat{N}$ en enhetsnormal till randytan ∂D^* som alltid pekar ut från kroppen D^*.

4 Flödesintegraler

Definition: Låt $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett integrerbart vektorfält, och låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd vars rand ∂K är en styckvis C^1-yta.
Flödet av $\vec{F}$ ges av

$$\oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} dS, \quad (24)$$

där $\hat{N}$ är en enhetsnormal till ∂K som alltid pekar ut från K.

Beräkning av flödesintegraler

Metod 1: Välj en lämplig parametrisering av ytan och beräkna tillhörande dubbelintegral direkt.

Parametrisering: $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto \vec{r}(s,t) = (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$.