

Sammanfattning av läsvecka 6 i flervariabelanalys (MVE035)

Jonathan Carlsson
Daniele Evangelista
Christian Gustavsson
Rakel Hellberg

vt2020

Innehåll

1	Kurvintegraler	3
1.1	Terminologi	3
2	Greens sats	4
2.1	Bevis	5
3	Konservativa fält och potentialer	7
3.1	Konservativa fält	7
3.2	Villkor för konservativa fält	8
4	Ytintegraler och Gauss sats	8
4.1	Gauss sats	10

1 Kurvintegraler

Definition 1. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett $\mathcal{C}^1$ -vektorfält. Om γ är en orienterad $\mathcal{C}^1$ -kurva i en öppen delmängd till $\mathbb{R}^n$ med parameterframställningen

$$\gamma = \{ \mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b \}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (1)$$

då definieras kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs kurvan enligt

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (2)$$

Det ska noteras att värdet av kurvintegralen är oberoende av vilken parametrisering som väljs så länge denna är korrekt (kan bevisas med kedjeregeln). Det betyder alltså att det räcker att välja en lämplig parametrisering och sedan integrera som vanligt för att beräkna kurvintegralen.

Beteckningen för kurvintegralen längs en kurva γ är

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{eller} \quad \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

I den andra integralen indikerar cirkeln att kurvan är sluten (d.v.s. dess startpunkt är samma som dess slutpunkt) och genomlöps moturs. Det är vanligt att man skriver $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ när en explicit parametrisering inte är given.

Man kan även beteckna kurvintegralen för fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ med den så kallade **differentialformen**

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

En fysikalisk tolkning: om $\vec{\mathbf{F}}$ är ett kraftfält så representerar kurvintegralen det arbete W som utförs när en partikel flyttas längs en kurva.

1.1 Terminologi

Det kan bli tidskrävande att beräkna kurvintegraler endast via explicit parametrisering och integration. En annan metod är att tillämpa Greens sats. Den beskrivs först senare i texten, så tills dess inför vi lite mer nyttig terminologi och notation.

Definition 2. Låt åter $\gamma = \{ \mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b \}$ vara en parametriserad kurva. γ sägs vara

- (i) sluten om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$,
- (ii) enkel om $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ då $a \leq t_1 < t_2 \leq b$.

Tidigare gavs en cirkel med någon startpunkt som exempel för en sluten kurva. En sådan kurva är dessutom enkel. Ett exempel på en kurva som är sluten men inte enkel är en som liknar en "8". Den är inte enkel, ty den korsar sig själv innan slutpunkten.

Jordans kurvsats. Låt γ vara en enkel, sluten $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består komplementet $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter: en begränsad intern mängd U , och en obegränsad extern mängd V . Både U och V har γ som rand, och de har inga gemensamma värden ($U \cap V = \emptyset$).

Satsen hjälper oss att säga vad som menas med att genomlöpa en kurva moturs, respektive medurs. Att genomlöpa en kurva moturs innebär att insidan ligger till vänster om kurvans färdriktning. Går vi medurs ligger den till höger.

Medan Jordans kurvasats må te sig intuitivt självklar, är den i själva verket relativt svårbevisad med elementära medel.

Definition 3 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område vars rand består av ett eller flera $\mathcal{C}^1$ -kurvor. Randen ∂D sägs vara *positivt orienterad* om D ligger till vänster om färdriktningen.

Det är värt att notera att om området D besitter "hål", kan randen för D kring dessa hål tyckas vara motsatt orienterad de "yttre" delarna av ∂D . Med vardagliga definitioner för *medurs* och *moturs* löper den positivt orienterade randen ∂R moturs kring utsidan av området R , och medurs kring dess insida.

2 Greens sats

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett kompakt område vars rand ∂D är en positivt orienterad, enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ som utgörs av en eller flera styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor. Om P och Q är två $\mathcal{C}^1$ -funktioner definierade i en öppen mängd i planet innehållande D så är

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3)$$

2.1 Bevis

För beviset förutsätter vi att D är en enklare region som kan delas upp i ett ändligt antal delregioner av exklusivt typ I och exklusivt typ II (där typ I innebär regioner definierade enligt $\{(x,y); \phi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$ och typ II enligt $\{(x,y); \xi(y) \leq x \leq \chi(y), c \leq y \leq d\}$).

Om det kan visas att både

$$\oint_{\partial D} P \, dx = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy \quad (4)$$

och

$$\oint_{\partial D} Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) \, dx \, dy \quad (5)$$

är sanna, följer Greens sats för regionen D .

Vi antar att E är ett delområde till D av typ I, använder oss av definitionen ovan för regioner av typ I och beräknar dubbelintegralen i ekv. (4):

$$\begin{aligned} \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy &= \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} \, dy \, dx = \\ &= \int_a^b P(x, \phi(x)) \, dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) \, dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Nu behöver vi beräkna kurvintegralen i ekv. (4). Vi delar upp randen ∂E i fyra kurvor γ , τ , σ , respektive ω betecknande följande komponenter av randen: den undre gränsen i y -led, den övre gränsen i x -led, den övre gränsen i y -led, respektive den undre gränsen i x -led (se fig. 1).

Med γ använder vi parameterekvationerna $x = x, y = \phi(x), a \leq x \leq b$. Då får vi att

$$\int_{\gamma} P(x, y) \, dx = \int_a^b P(x, \phi(x)) \, dx. \quad (7)$$

Med σ använder vi parameterekvationerna $x = x, y = \psi(x), a \leq x \leq b$ och får då att

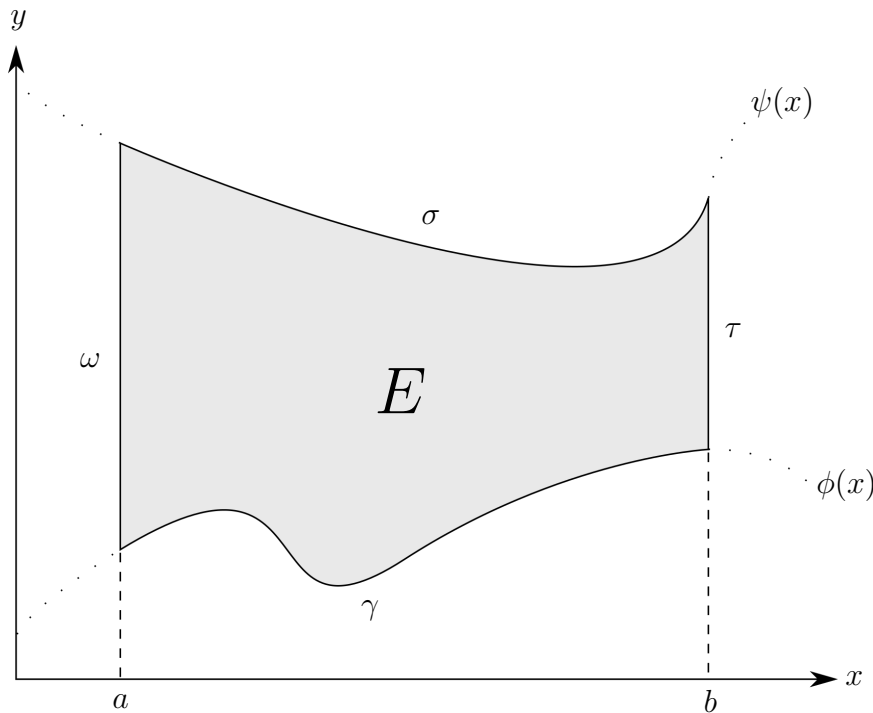
$$\int_{\sigma} P(x, y) \, dx = - \int_{-\sigma} P(x, y) \, dx = - \int_a^b P(x, \psi(x)) \, dx \quad (8)$$

(observera negationen på grund av orienteringen av ∂E och därmed σ). På τ och ω förblir x konstant, vilket innebär att integration över dessa kurvor ger 0. Slutligen har vi då att

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} P dx &= \int_{\gamma} P(x,y) dx + \int_{\sigma} P(x,y) dx = \\ &= \int_a^b P(x,\phi(x)) dx - \int_a^b P(x,\psi(x)) dx \end{aligned} \quad (9)$$

som i ekv. (6). Addition av detta resultat för alla delområden E av D ger oss ekv. (4). Om vi istället använder en uppdelning av D i typ II-regioner kan vi på ett liknande sätt erhålla ekv. (5). Addition av ekv. (4) och (5) ger oss avslutningsvis ekv. (3).

■



FIGUR 1: Exempel på en delyta E , instängd av kurvorna γ , τ , σ , och ω , som tillsammans bildar randen ∂E . Notera att kriteriet för områden av typ I fortfarande möts om τ eller ω har längden 0 (exempelvis om $\phi(x)$ och $\psi(x)$ skär varandra vid $x = b$ respektive $x = a$).

3 Konservativa fält och potentialer

Vissa fält har egenskapen att alla kurvintegraler

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10)$$

i något öppet område Ω , är samma för alla kurvor γ med samma start- och slutpunkt. Med andra ord är alla kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω *oberoende av väg*, och alla integraler av en sluten kurva identiska med noll.

3.1 Konservativa fält

Ett *konservativt fält* eller *potentialfält* definierat i ett öppet område Ω är ett fält som har en *potential*. Med detta menas att

$$\exists U \in \mathcal{C}^1(\Omega) | \mathbf{F} = \nabla U \quad (11)$$

där $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är fältets potential. En potential till $\mathbf{F}$ är alltså en funktion vars gradient är $\mathbf{F}$, och de (oändligt många) potentialer till $\mathbf{F}$ som existerar skiljs endast av en additiv konstant.

Potentialer påminner redan om envariabelanalysens primitiva funktioner, och vi ska se att de har än mer gemensamt.

Sats 3.1.1 *Låt $\mathbf{F}$ vara ett konservativt fält med potentialen U i det öppna området Ω . Då gäller, för varje kurva γ med startpunkt $\mathbf{a}$ och slutpunkt $\mathbf{b}$ i Ω , att*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}). \quad (12)$$

Speciellt är integralen oberoende av vägen.

Här ser vi hur användbar egenskapen att kurvintegraler i vissa fält är oberoende av väg, som vi tog upp i början av avsnittet, kan vara.

Sats 3.1.2 *Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt fält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω och med varje kurvintegral av $\mathbf{F}$ på Ω oberoende av väg. Då gäller*

$$\exists U \in \mathcal{C}^1(\Omega) | \mathbf{F} = \nabla U$$

Ekvationen i sats 3.1.2 är densamma som ekvation 11, alltså säger satsen att fältet $\mathbf{F}$ är konservativt och har potentialen U .

3.2 Villkor för konservativa fält

Att försöka konstruera en potential varje gång man vill avgöra om ett fält är konservativt är uppenbarligen inte någon effektiv metod. Därför ska vi ta upp ett par enklare sätt att avgöra om ett fält är konservativt eller inte.

Sats 3.2.1 Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett vektorfält definierat i Ω och med potentialen $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Då är

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (13)$$

Nu har vi ett nödvändigt villkor för konservativa fält — är $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ vet vi att $\mathbf{F}$ inte är konservativt. Innan vi tar itu med nästa sats, där vi ska presentera ett tillräckligt villkor för konservativa fält, behöver vi göra en definition.

Att en öppen mängd Ω i planet är *enkelt sammanhängande* betyder att denna är bågvis sammanhängande, och att varje sluten kurva i Ω avgränsar ett område som helt och hållet består av punkter i Ω . Mer intuitivt är en enkelt sammanhängande mängd en mängd som saknar hål.

Sats 3.2.2 Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett vektorfält med

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega \quad (14)$$

där Ω är en öppen, enkelt sammanhängande mängd. Då är $\mathbf{F}$ konservativt på Ω .

Nu har vi bättre verktyg för att hantera problem kring kurvintegraler i konservativa fält.

4 Ytintegraler och Gauss sats

Ytintegraler finns i två varianter, nämligen som en integral av en ”vanlig funktion” (skalär funktion) $f(x, y)$ över en yta, se ekvation (15), och integral av ett vektorfält över en yta, se ekvation (16).

$$\iint_Y f(x, y, z) dS \quad (15)$$

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\bar{S} \quad (16)$$

Här kallas integralen av ett vektorfält för en flödesintegral medan den andra mer allmänt hänvisas till som ytintegral och kan närmast ses som en vanlig dubbelintegral, med skillnaden att integrationen görs över en yta Y i stället för över ett plant område Ω .

Flödesintegraler är särskilt viktiga i tillämpningar. Låt säga att man har något som strömmar i rummet, exempelvis en gas eller en vätska, och att denna strömning (hastighet och densitet) beskrivs av ett vektorfält $\mathbf{F}(x,y,z)$. Vektorfältet kan då ses som en kombination (produkt) av densitet och hastighet. Man kan alltså inte erhålla densitet och hastighet var och en för sig i en given punkt i rummet om man stoppar in punktens koordinater i uttrycket för $\mathbf{F}(x,y,z)$. Det är dock inte viktigt i sammanhanget då både hastighet och densitet kan påverka samma slutresultat (hur mycket gas/vätska som rör sig genom en given position i rummet och i vilken riktning). Två punkter på olika platser i rummet kan alltså ha samma värde på $\mathbf{F}$ (genomströmning av vätska) trots att densiteten för vätskan är olika i punkterna (detta kompenseras då av att hastigheten är större i punkten med lägre densitet).

Vad man är intresserad av är hur stort flödet Φ av vätskan är genom en specifik yta Y i rummet. Detta kan beräknas genom

$$\Phi = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS, \quad (17)$$

som då ger massa per tidsenhet av vätskan som strömmar genom ytan. Här är $\hat{n}$ en normalvektor med längd ett (enhetsnormal), som alltså är normal mot varje punkt på ytan, och dS kallas för ytelementet och är ett litet område på ytan. Skillnaden mellan detta uttryck och formen (16) är att enhetsnormalen och ytelementet dS slagits samman (bakats ihop) till det vektoriella ytelementet $d\vec{S}$, som är en vektor ortogonal gentemot varje punkt på ytan och med en längd lika med arean av dS . Denna integral är dock svår att använda vid konkreta problem. Man söker därför ett annat uttryck för $\hat{n}$ och dS . Genom att parametrisera Y erhåller man ytan som en generell vektor $\vec{r}(t,s)$ där varje punkt på Y ges av ett specifikt par av s och t . För en generell punkt P på ytan så erhålls lutningen av ytan i den punkten med avseende på t av vektorn $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ (observera att detta inte är lutningen med avseende på x - eller y -axeln utan med avseende på koordinataxeln t i ett st -plan som hör till ytan Y), på samma sätt erhålls lutningen med avseende på s ("s-axeln") av vektorn $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$. Dessa två vektorer spänner upp tangentplanet i P . Men från definitionen av vektorprodukt så vet man att vektorprodukten av dessa två vektorer blir ortogonal (vinkelrät) gentemot detta plan och alltså parallell med $\hat{n}$. Normeras denna vektor så får den resulterande vektorn alltså samma riktning och längd som $\hat{n}$ och kan därför användas som ett alternativt uttryck för $\hat{n}$.

Man kan visa att området dS på ytan tar formen av en parallelogram och att denna spänns upp av vektorerna $(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t})dt$ och $(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s})ds$ vilket ger att arean dS blir lika med längden av vektorprodukten av dessa båda vektorer. Man ser vid insättning av de nya uttrycken för $\hat{n}$ och dS att uttrycket

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right| \quad (18)$$

hamnar i både nämnare och täljare och därmed kan förkortas bort. Man har alltså följande med ekvation (17) ekvivalenta uttryck för en flödesintegral av $\mathbf{F}$ över Y

$$\iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) ds dt \quad (19)$$

där R markerar att integralens gränser inte längre ska hämtas från ytan Y utan från st-planet.

Om ytan Y är en funktionsyta (Y kan beskrivas som $z = f(x, y)$) så behöver man inte parametrisera Y för att beräkna flödesintegralen. Det viktiga sambandet

$$d\bar{S} = \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) dx dy \quad (20)$$

kan i stället användas för att direkt ge det sökta flödet.

4.1 Gauss sats

Med Gauss sats (även kallad divergenssatsen) så kan problemet att beräkna en dubbelintegral över ytan Y överföras på det mycket enklare problemet att beräkna en trippelintegral över den kropp K som har ytan Y .

$$\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV \quad (21)$$

Divergensen av $\mathbf{F}$ (uttryckt som $\operatorname{div} \mathbf{F}$ eller $\nabla \cdot \mathbf{F}$) beräknas genom att summera den partiella derivatan av vektorfältets första komponent med avseende på x , den andra med avseende på y och den tredje med avseende på z . Detta resulterar i en skalärfunktion. Om denna skalärfunktion blir lika med en skalär så kan denna brytas ut ur integralen och den kvarvarande integralen blir enligt en sats (som inte går igenom här) lika med volymen av K , vilken kan vara mycket enkel att beräkna.