

Sammanfattning LV6 - Flervariabelanalys

Johan Bergman, Mikael Eriksson, Joakim Manning, Jakob Seevers,
Mattias Dackhammar och Hampus Jiozon

28 mars 2020

1 Kurvintegraler

Givet en partikel som rör sig längsmed en kurva γ och under tiden påverkas av kraften $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, där $\mathbf{r}$ är en parameterframställning av γ som ger partikelns positioner $\mathbf{r}$ som en funktion av tiden $\mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, kan arbetet uträttat av kraftfältet på partikeln beräknas med följande integral enligt den fysikaliska tolkningen av skalärprodukt då $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ är kraften på partikeln under sträckan den infinitesimala sträckan $\mathbf{r}'(t)dt$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (1)$$

2 Jordans kurvsats och Greens sats

Definition 1

Låt $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$ vara en parametriserad kurva. Då gäller följande definitioner:

γ sägs vara sluten om $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$

γ sägs vara enkel om $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ då $\alpha \leq t_1 < t_2 < \beta$

Jordans kurvsats

Låt γ vara en enkel och sluten C^0 -kurva i planet $\mathbf{R}^2$. Då består området $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ av två sammanhängande komponenter som kallas för kurvans insida och utsida.

Med Jordans kurvsats kan vi nu rigoröst bestämma vad som menas med att genomlöpa en enkel och sluten kurva medurs eller moturs beroende på om insidan är till vänster eller höger om riktningen som kurvan genomlöps.

Definition 2

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område vars rand består av en eller flera C^1 -kurvor. Randen ∂D sägs vara positivt orienterad om D ligger till vänster om färdriktningen. Analogt sägs randen vara negativt orienterad om området ligger till höger om färdriktningen.

Greens sats i planet

Låt P och Q vara två stycken C^1 -funktioner definierande i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, om det kompakta området D i Ω har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1 -kurvor som är positivt orienterade gäller följande:

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (2)$$

3 Konsekvens av Greens sats

Säg att $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett C^1 -vektorfält i $\mathbf{R}^2$ och låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbf{R}^2$. Jordans kurvsats medför då att γ innesluter ett sammanhängande område D så att $\gamma = \partial D$. Så länge $\mathbf{F}$ är C^1 i hela D så kan vi tillämpa Greens sats, vilken säger att om:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3)$$

Med samma hypoteser som ovan så finns det två villkor för att kraften $\mathbf{F}$ inte utgör något arbete längs kurvan γ .

1. $\mathbf{F}$ är definierad och C^1 på hela insidan till γ
2. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Definition

Ett C^1 -fält $\mathbf{F} = (P, Q)$ i $\mathbf{R}^2$ sägs vara **virvelfritt** om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

4 Konservativa fält

Säg att det finns ett C^2 -skalärfält $\phi : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ så att $\mathbf{F} = \nabla \phi$. Då har vi:

$$\mathbf{F} = (P, Q) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

och på samma sätt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}. \quad (5)$$

Så alltså om $\phi \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Definition

Ett n -dimensionellt vektorfält $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ kallas för ett **konservativt fält** eller **potentialfält** om det finns ett skalärfält $\phi : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ så att $\mathbf{F} = \nabla \phi$. ϕ kallas för en potential till $\mathbf{F}$.

Observation

En potential till ett givet fält $\mathbf{F}$ är unik upp till en konstant, d.v.s. om $\nabla\phi_1 = \nabla\phi_2 = \mathbf{F} \Rightarrow \nabla(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Slutsatsen från detta är att $\phi_1 - \phi_2 = \text{konst.}$ då definitionsmängden är bågvis sammanhängande. Man kan nu utan Greens sats visa att ett konservativt fält i $\mathbf{R}^2$ inte utför något arbete längs en enkel och sluten kurva.

Sats 9.4.2

Låt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ vara ett potentialfält med potential ϕ i det öppna området Ω . För varje kurva γ i Ω gäller att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}), \quad (6)$$

där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är start- och slutpunkt till γ .

Bevis av Sats 9.4.2

Bevis. Välj någon C^1 -parametrisering för γ s.a. $\gamma = \{\mathbf{r}(t) | a \leq t \leq b\}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \{\text{kedjeregeln}\} = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad \square$$

Korollarium

Med samma hypoteser som i Sats 9.4.2 gäller:

1. Om γ är en sluten kurva så är $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
2. Kurvintegraler för $\mathbf{F}$ är oberoende av väg, d.v.s. om två olika kurvor γ_1 och γ_2 har samma start- och slutpunkt så blir $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Sats 9.4.3

Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i den bågvis sammanhängande öppna mängden $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Om $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i Ω , då finns det ett skalärfält ϕ så att $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

Bevisiden för Sats 9.4.3 är att definiera ϕ enligt $\phi(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är en valfri kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$ och $\mathbf{a}$ är en valfri baspunkt i definitionsmängden till ϕ . Sedan återstår det att bevisa att $\mathbf{F} = \nabla\phi \iff \mathbf{F}_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Definition

En mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ sägs vara **enkelt sammanhängande** om:

1. Ω är bågvis sammanhängande
2. för varje enkel och sluten kurva γ i Ω så ligger insidan till γ i Ω .

Sats 9.4.5

Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är C^1 och uppfyller $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i det enkelt sammanhängande området $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ så har $\mathbf{F}$ en potential i Ω .

Bevisiden för Sats 9.4.5 är att använda sig av Sats 9.4.3 och visa att $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje enkel och sluten kurva γ i Ω .

5 Samband

Nedan följer ett gäng samband som visar hur de satser och definitioner som gåtts igenom hänger ihop:

- I $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{F}$ är konservativt $\iff \exists \phi : \mathbf{F} = \nabla \phi \iff \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ om γ är sluten.
- I $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt och $C^1 \iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \iff \mathbf{F}$ virvelfritt $\Rightarrow \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ så länge $\mathbf{F}$ är definierad och C^1 på hela insidan till γ . ***Ekvivalens gäller ifall definitionsmängden till $\mathbf{F}$ är enkelt sammanhängande enligt sats 9.4.5.**

6 Greens sats för reguljära områden

6.1 Definition

Det begränsade, kvadrerbara området $D \subseteq \mathbf{R}^2$ sägs vara reguljärt i x -led om D kan partitioneras i ändligt många områden $D_1, D_2, \dots, D_n$ på formen:

$$D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\},$$

där $\alpha_i(x)$ och $\beta_i(x)$ är C^0 och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$ för $x \in [a_i, b_i]$.

Reguljärt i y -led definieras på analogt sätt. D sägs vara reguljärt om D är reguljärt i både x - och y -led.

6.2 Bevis av Greens sats

Bevis. Steg 1: Antag först att:

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i \text{ där } D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$$

I första steget visar vi att för varje i gäller:

$$\oint_{\partial D_i} P dx = \iint_{D_i} \frac{-\partial P}{\partial y} dx dy$$

Betrakta HL enligt Fubinis sats:

$$HL = \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy = \dots = \int_{a_i}^{b_i} P(x, \alpha_i(x)) dx + \int_{b_i}^{a_i} P(x, \beta_i(x)) dx$$

Betrakta nu VL:

$$\oint_{\partial D_i} P \, dx = \int_{\gamma_1} P \, dx + \int_{\gamma_3} P \, dx$$

γ_1 hör till funktionskurvan $y = \alpha_i(x) \Rightarrow x$ kan användas som parameter

γ_2 hör till funktionskurvan $y = \beta_i(x) \Rightarrow x$ kan användas som parameter

$$\Downarrow$$

$$VL = \int_{a_i}^{b_i} P(x_i \alpha_i(x)) \, dx + \int_{b_i}^{a_i} P(x_i \beta_i(x)) \, dx = HL \quad \text{V.S.V}$$

Steg 2: Vi härleder att om D är reguljärt i x -led $\Rightarrow$

$$\oint_{\partial D} P dx = \iint_D \frac{-\partial P}{\partial y} dx dy$$

Med $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ så vet vi att $\oint_{\partial D_i} P dx = \iint_{D_i} \frac{-\partial P}{\partial y} dx dy$ för varje i .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \frac{-\partial P}{\partial y} dx dy$$

När man summerar kurvintegralerna så kancellerar alla inre integraler, ty varje inre kurva genomlöps en gång i vardera riktning. Det som blir kvar är kurvintegralen genom den yttre randen ∂D . Summan av dubbelintegralerna över de olika D_i blir alltså dubbelintegralen över hela D .

Steg 3: Vi vet från steg 2 att om D är reguljärt i x -led så gäller:

$$\oint_{\partial D} P dx = \iint_D \frac{-\partial P}{\partial y} dx dy$$

På samma vis kan man visa att om D är reguljärt i y -led så gäller:

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

Om D är reguljärt så gäller båda ekvationerna $\Rightarrow$ addera

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \square$$

7 Areaberäkning med Greens sats

Tag $P = 0$ och $Q = x \Rightarrow \text{Area}(D) = \oint_{\partial D} x dy$

Alternativt: $P = -y$ och $Q = 0 \Rightarrow \text{Area}(D) = -\oint_{\partial D} y dx$

Konvex kombination

$$\text{Area}(D) = \lambda \oint_{\partial D} x dy - (1 - \lambda) \oint_{\partial D} y dx \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\text{I symmetri } \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Area}(D) = \frac{1}{2} \left[\oint_{\partial D} x dy - y dx \right]$$

Exempel: Arean av en ellips

Ellipsen ges av:

$$\gamma = \{(a * \cos \Theta, b * \sin \Theta) | 0 \leq \Theta \leq 2\pi\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Area} &= 1/2 \oint_{\gamma} x dy - y dx = 1/2 \int_0^{2\pi} (a * \cos \Theta)(b * \cos \Theta d\Theta) - (b * \sin \Theta)(-a * \sin \Theta d\Theta) \\ &= ab/2 \int_0^{2\pi} d\Theta = \pi ab \end{aligned}$$

8 Övergång från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$

8.1 Definition

Låt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara ett tredimensionellt C^1 -fält

(1) Divergensen av $\mathbf{F}$ ges av

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (7)$$

(2) Rotationen av $\mathbf{F}$ ges av

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) = (\nabla \times \mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (8)$$

8.2 Omformuleringar av Greens sats

Greens sats, för referens, säger

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (9)$$

8.2.1 Första omformuleringen

Betrakta $\mathbf{D}$ som en yta i $\mathbf{R}^3$, dvs en del av $\mathbf{xy}$ -planet. Betrakta $\mathbf{F}$ som ett tredimensionellt fält genom att ansätta $F_3 = 0$. Då blir

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \left(0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k} \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (10)$$

Vi kan alltså skriva Greens sats på formen

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (11)$$

där vi vet att detta gäller för en yta i $\mathbf{R}^3$ som ligger i ett plan. Att ∂D är ett positivt orienterad innebär att $\hat{\mathbf{N}} \times d\mathbf{r}$ pekar in mot D .

Stokes sats generaliserar detta till ett godtyckligt C^1 -ytstycke i $\mathbf{R}^3$.

8.2.2 Andra omformuleringen

Definera nytt fält $\mathbf{G} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, där $(G_1, G_2) = (F_2, -F_1)$.

Betrakta $\mathbf{G}$ i $\mathbf{R}^3$ genom att sätta $G_3 = 0$. Greens sats högerled är då

$$HL = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{G}. \quad (12)$$

Om vi låter D^* vara en cylinder i $\mathbf{R}^3$ med tvärsnittet D och höjden 1 kan vi skriva om till $\mathbf{R}^3$

$$\Rightarrow \iint_D (\nabla \cdot \mathbf{G}) dx dy = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbf{G}) dx dy dz. \quad (13)$$

Vänsterled ger

$$VL = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \oint_{\partial D} -G_2 dx + G_1 dy = \oint_{\partial D} (G_1, G_2) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds, \quad (14)$$

där ds är längdelementet och $\hat{\mathbf{N}}$ är normalvektorn ut från D .

$$\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \oiint_{\partial D^*} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} d\mathbf{S} = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbf{G}) dV \quad (15)$$

där ∂D^* är randen till cylindern D^* och $\hat{\mathbf{N}}$ är enhetsnormalen som pekar ut från cylindern. Vi vet att detta gäller åtminstone för en cylinder kring z -axeln med ett fält $\mathbf{G}$ med $G_3 = 0$.

Gauss divergenssats säger att (15) gäller utan samma villkor på $\mathbf{G}$ och ∂D^* som vi gav under omskrivningen.

8.2.3 Återkoppling

Sammanfattningsvis finns det två sätt att omformulera Greens sats från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$. Den första metoden ger ett specialfall av Stokes sats medan den andra metoden ger ett specialfall av Gauss divergenssats.

9 Ytintegraler

9.1 Definition

Låt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara ett integrerbart vektorfält och låt $K \subseteq \mathbf{R}^3$ vara en kompakt kvadrerbar mängd vars rand ∂K är en styckvis C^1 -yta. Flödet av $\mathbf{F}$ ut från K ges av

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} d\mathbf{S}, \quad (16)$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är en enhetsnormal till ∂K som alltid pekar ut från K .

9.2 Beräkning

Precis som med kurvintegraler i $\mathbf{R}^2$ kan vi beräkna ytintegraler styckvis genom att välja passande parametrisering av ytan och beräkna tillhörande dubbelintegraler. Vid denna beräkning kan vi bestämma $\hat{\mathbf{N}} d\mathbf{S}$ -delen i (16) genom att använda oss av parametriseringen

$$\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (17)$$

$$(s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t) \quad (18)$$

vilket ger

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{N}} d\mathbf{S} = \pm \left(\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right) ds dt \quad (19)$$

$$\Rightarrow \oint_{\Pi(\partial K)} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right) ds dt, \quad (20)$$

där $\Pi(\partial K)$ är projektionen av ytan ner på st-planet.