

Rapport LV7

Alice Alnebratt, Isak Bengtsson, Richard Blücher,
Terese Kärnell, Oscar Muhr

Mars 2020

Gauss divergenssats

Sats (10.2.1): Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1 -ytor orienterade med en utåtriktad normal gäller:

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV \quad (1)$$

För att kunna bevisa Gauss divergenssats måste vi först ge en definition av ett reguljärt område.

Definition: En kompakt, kvadrerbar mängd K i $\mathbb{R}^3$ sägs vara **reguljärt med avseende på z** om det finns en partition $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ sådan att $K_i = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_i, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ där D_i är en kompakt, kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^2$ och $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ är C^0 -funktioner s.a. $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in D_i$. Reguljäritet med avseende på x respektive y definieras på analogt vis. **K sägs vara reguljärt om K är reguljärt med avseende på x, y och z .**

Bevis: Vi delar upp beviset i tre steg:

Steg 1

Betrakta ett område på formen

$$K_i = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_i, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Vi bevisar att

$$\oint_{\partial K_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iiint_{K_i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV.$$

Enligt Fubinis sats blir högerledet, där $\pi(K_i)$ är K_i s projektion i planet:

$$\iiint_{K_i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \iint_{\pi(K_i)=D_i} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dz =$$

$$= \iint_{D_i} [F_3(x, y, \psi_i(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_i(x, y))] dx dy,$$

där $\pi(K_i)$ är projektionen av K_i på xy -planet, som vi sedan definierar som D_i . Randen av K , det vill säga ∂K , består av tre delar. Toppen, botten och en del mellan toppen och botten som går runt z -axeln. För delen som ligger mellan toppen och botten gäller att normalen, $\hat{N}$, är parallell med xy -planet och således blir

$$(0, 0, F_3) \cdot \hat{N} = 0.$$

Detta lämnar vänsterledet att bli

$$\oiint_{\partial K_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iint_{toppen} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS + \iint_{botten} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS$$

Eftersom toppen tillhör $z = \psi(x, y)$ gäller det att

$$\hat{N} dS = (-\psi(x, y), -\psi(x, y), 1) dx dy \Rightarrow (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = F_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy.$$

Vilket leder till

$$\iint_{toppen} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iint_{D_i} F_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy.$$

Analogt för botten får vi att

$$\iint_{botten} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = - \iint_{D_i} F_3(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.$$

Slutligen får vi då att

$$VL = \iint_{D_i} [F_3(x, y, \psi_i(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_i(x, y))] dx dy = HL$$

Steg 2

Antag att K är reguljärt med avseende på $z \Rightarrow K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ där vi vet från steg 1 att för varje i gäller:

$$\oiint_{\partial K_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iiint_{K_i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV.$$

Om vi adderar detta får vi att summan av högerledet trivialt blir $\iiint_K \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV$. För vänsterledet behöver man visa att summan blir $\oiint_{\partial K} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS$ genom att visa att alla flödesintegraler över inre stycken cancelleras.

Steg 3

På analogt vis kan man visa att om K är reguljärt med avseende på y gäller det att

$$\oiint_{\partial K} (0, F_2, 0) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dV.$$

Samt att om K är reguljärt med avseende på x

$$\oint_{\partial K} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right) dV.$$

Detta betyder att om K är **reguljärt** gäller alla tre likheter och vi kan addera dem till

$$\oint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbb{F}) dV.$$

□

Observera att detta kan generaliseras till högre dimensioner.

Fysikalisk tillämpning av Gauss divergenssats

Coloumbs lag för krafter mellan elektriska laddningar ges av

$$\mathbf{F} = \frac{C \cdot Q \cdot q}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (2)$$

och det elektriska fältet som produceras av laddningen Q definieras som

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot q \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{C \cdot Q}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

Låt nu K vara ett klot av radie a kring Q (OBS: För klot är $\hat{N} = \hat{\mathbf{r}}$)

$$\Rightarrow \oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{N} dS = \oint_{\partial K} \frac{C \cdot Q}{a^2} dS = 4\pi CQ. \quad (3)$$

Detta kan generaliseras till kontinuerligt utsmetade stationära laddningar vilket ger Gauss lag för elektriskt flöde:

The total electric flux through a closed surface equals $1/\varepsilon$ times the net electric charge within that closed surface. Where ε is the electric permittivity of the medium.

Vilket, matematiskt uttryckt, är

$$\oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{N} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho(x, y, z) dV.$$

Om vi nu applicerar Gauss divergenssats i vänster led och antar att ε är konstant inom kroppen K fås

$$\oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \iiint_K \frac{\rho}{\varepsilon} dV.$$

Då detta gäller för godtycklig sluten kropp K är integranderna lika vilket att

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Denna likhet är den första av Maxwells ekvationer.

Stokes sats

Definition: Låt D vara en kompakt, kvadrerbar delmängd till $\mathbb{R}^2$ med positivt orienterad rand $\partial D \in C^1$. Låt $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$Y = \mathbf{r}(D)$ kallas för en **parametriserad C^1 -yta**.

Vi definierar randen ∂Y enligt $\partial Y = \mathbf{r}(\partial D)$ och ∂Y sägs vara **positivt orienterad om den ärver den positiva orienteringen för ∂D** .

Stokes sats (10.3.2): Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat C^1 -ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y gäller

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS. \quad (5)$$

Bevis: Detta bevis gäller då Y är en del av en C^2 -funktionsyta, d.v.s. då

$$Y = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, f \in C^2\}.$$

Vi börjar med att utveckla vänsterledet

$$\begin{aligned} \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\partial Y} (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz) = \\ &\stackrel{\text{kedjeregeln}}{=} \oint_{\pi(\partial Y) = \partial D} (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy) = \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \oint_{\partial D} (F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}) dx + (F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}) dy = \\ &= \iint_D (\frac{\partial}{\partial x} (F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x})) dx dy = \end{aligned}$$

efter utveckling av de partiella derivatorna med hjälp av kedjeregeln får vi en term för integranden som förenklas till följande

$$= -\frac{\partial f}{\partial x} \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right] - \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] =$$

detta uttryck kan förenklas till

$$\begin{aligned} &= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \\ \Rightarrow \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy \end{aligned}$$

på funktionsytan $z = f(x, y)$ är $\hat{N} dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$

$$\Rightarrow \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

□

Förhållandet mellan begreppen virvelfritt och konservativt i $\mathbb{R}^3$

Definition: Ett C^1 -vektorfält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sägs vara **virvelfritt** om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Observera att detta är konsekvent med definitionen i $\mathbb{R}^2$ ty om

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6)$$

vilket gäller om och endast om $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ som är definitionen i $\mathbb{R}^2$.

Sats (10.5.3): Om $\mathbf{F} = \nabla \phi$ och $\phi \in C^2$ är $\mathbf{F}$ virvelfritt.

Bevis: Låt $\mathbf{F} = \nabla \phi \Rightarrow F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$. Då får vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Sätter vi nu in värdena för F_1, F_2 samt F_3 får vi

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = \\ &\stackrel{\phi \in C^2}{=} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sats (10.5.4): Om $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ är virvelfritt och Ω är enkelt sammanhängande, då är $\mathbf{F}$ konservativt.

För att kunna bevisa detta måste vi definiera vad det betyder att vara en enkelt sammanhängande mängd.

Definition (i $\mathbb{R}^n$): Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω sägs vara **enkelt sammanhängande** om

- Ω är sammanhängande
- Varje enkel sluten kurva γ i Ω kan kontinuerligt kontraheras till en enda punkt utan att lämna Ω

Bevis: Det räcker enligt sats 9.4.3 att visa att

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7)$$

för varje enkelt sluten kurva γ i Ω . Låt γ vara en sådan kurva. Eftersom Ω är enkelt sammanhängande så kan γ kontinuerligt kontraheras till en punkt inom Ω . Låt Y vara ytan i Ω som sveps ut under kontraktionen. Då är $\gamma = \pm \partial Y$, ($\pm$

ty vi vet ej a priori hur γ är orienterad med avseende på Y). Detta leder till att

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm \oint_{\partial\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{Stokes}{=} \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS = 0$$

vilket var vad som skulle visas. $\square$

Fysikaliska tillämpningar av Stokes sats

Faradays law of induction

The induced electromotive force in any closed circuit equals the negative of the time rate of change of the magnetic flux enclosed by the circuit.

Matematiskt kan detta skrivas

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{ins(\gamma)} \mathbf{B} \cdot \hat{N} dS = \iint_{ins(\gamma)} -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} dS$$

omskrivning med hjälp av Stokes sats ger

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{ins(\gamma)} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{N} dS \Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_{ins(\gamma)} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{N} dS &= \iint_{ins(\gamma)} -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} dS \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ampères lag

En ström i en ledare av oändlig längd producerar ett magnetfält ($\mathbf{B}$) vinkelrätt mot ledaren.

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right) \quad (9)$$

Vi har redan sett att om γ är en enkel, sluten kurva i ett plan, ortogonalt mot ledaren, runt ledaren är

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = cI(2\pi) = \mu I; \mu = 2\pi c \quad (10)$$

μ kallas den magnetiska permeabiliteten i mediet. Den magnetiska permeabiliteten i vakuum, även kallad magnetiska konstanten, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$.

Om strömmen istället är kontinuerligt utsmetad har vi en så kallad strömtäthet $\mathbf{J}$. Den kontinuerliga versionen av föregående ekvation blir

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu \iint_{ins(\gamma)} \mathbf{J} \cdot \hat{N} dS$$

tillämpa Stokes sats i vänsterled och anta att μ är konstant inom ledaren γ så att vi kan plocka in den i integranden

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\text{ins}(\gamma)} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{N} dS = \iint_{\text{ins}(\gamma)} \mu \mathbf{J} \cdot \hat{N} dS \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (11)$$

Den elektromagnetiska vågekvationen

Med hjälp av nablaoperatoren ($\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$) kan vi som tidigare gjorts formulera ett flertal viktiga ekvationer och satser, men det kan också vara bra att känna till några generella identiteter:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (12)$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (14)$$

∇^2 eller Δ kallas för Laplaceoperatoren, ($\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$). Om vi tar hjälp av dessa identiteter kan vi tillsammans med Maxwells ekvationer efter ett antal steg härleda den elektromagnetiska vågekvationen. Vi betraktar läget då vi befinner oss i vakuum.

Sedan tidigare har vi sett att för det elektriska fältet $\mathbf{E}$ gäller det att

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

vilket vi känner igen som Maxwells första ekvation. Variabeln ρ ger oss laddningsdensiteten och ε = den elektriska permittiviteten. I vårt specialfall där vi befinner oss i vakuum är dock laddningsdensiteten noll och vi får att

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (15)$$

Vi kommer också att använda oss av Faradays och Ampères lagar som tidigare härletts,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

där magnetfältet $\mathbf{B}$ relateras till det elektriska fältet. Här har Ampères lag korrigerats med ytterligare en term till vad som kallas Maxwell-Ampères lag. Då strömtätheten $\mathbf{J}$ även den är noll i vakuum fås till slut

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (16)$$

Om vi nu tillämpar ekv. 14 med $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ får vi att högerledet blir

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

där den första termen blir noll enligt ekv. 15. Vidare fås då

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E}.$$

Om vi nu istället utvecklar vänsterledet får vi att

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &\stackrel{(8)}{=} \nabla \times -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \stackrel{(\mathbf{B} \in C^2)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \stackrel{(16)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Vänsterledet har varit lika med högerledet hela vägen så vi får att

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Redan i läsvecka ett såg vi ett exempel på den endimensionella vågekvationen,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

där den allmänna lösningen gavs av $f(x, t) = H_1(x - ct) + H_2(x + ct)$, alltså en superposition av höger respektive vänstergående vågor med farten c . Man kan även bevisa att den allmänna lösningen till vågekvationen i det tredimensionella fallet är en superposition av vågor med fart c . För elektromagnetiska vågor kommer det då gälla att

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Det går inte nog understryka vikten av denna ekvation - Maxwell visade hur elektromagnetiska vågor beter sig i vakuum och att deras hastighet är exakt densamma som ljusets hastighet, c . I förlängningen innebär detta att vetenskapen för första gången någonsin förstod att ljuset faktiskt **är** en elektromagnetisk våg.

Optimering

Att optimera funktioner i flervariabelanalys innebär att vi vill bestämma det största och minsta värdet en given funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kan anta i en viss delmängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Lösningen av detta grundläggande optimeringsproblem bygger på generaliseringar av de metoder vi känner igen från envariabelanalysen. För allmänna mängder är det dock ingen självklarhet att det faktiskt existerar max- och minvärden och vi inskränker oss därför här till ett specialfall.

Vi väljer att betrakta fallet då vår delmängd $D = K$, en kompakt mängd. Detta innebär att i de fall funktionen f är kontinuerlig så gäller det att f antar både ett största och minsta värde inom mängden. En extrempunkt för f måste a priori antingen antas i en inre punkt eller på mängdens rand ∂K vilket kommer möjliggöra användandet av en rekursiv strategi. Notera att om vi betraktar mängden K som en n -dimensionell kropp är det intuitivt att tänka sig randen ∂K som $(n-1)$ -dimensionell. Låt oss nu därför formulera en generell metod för att bestämma extrempunkter i flera variabler.

Steg 0

Sätt $R := K$ och $g := f$.

Steg 1

Vi börjar med att betrakta de inre punkterna i mängden. Om ett extremvärde antas i en inre punkt måste det också vara ett lokalt extremum. Vi börjar därför med att bestämma alla lokala extrempunkter till funktionen g i regionen R . I de fall då $g \in C^1$ gäller det också att varje lokal extrempunkt är en kritisk punkt. Detta innebär att vi bara behöver lösa ekvationssystemet $\Delta g = \mathbf{0}$. När vi hittat vår funktions kritiska punkter i regionen sparar vi dem som kandidater till max- och minvärden för att utvärdera dem i avslutningsfasen.

Steg 2

Nu är det dags att utvärdera eventuella extrempunkter på randen ∂R . Bestäm först en parametrisering av ∂R enligt:

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \partial R,$$

där,

$$D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}.$$

Sätt sedan,

$$R := \partial R \quad g := g \circ \mathbf{r},$$

vilket innebär att vi betraktar restriktionen av den ursprungliga funktionen till randen av det ursprungliga området. Nu kan vi gå tillbaka till steg 1 och upprepa processen. Detta rekursiva förfarande kan vi fortsätta med tills vår parametrisering av randen inte längre är en C^1 -funktion.

Steg 3

När processen är klar bör det finnas ett antal kandidater till extrempunkter. Då återstår det endast att substituera in punkterna i den ursprungliga funktionen och välja ut det största och minsta funktionsvärdet som antas.