

Tavelpresentation L.V. 7

Gustav Strandlycke
Samuel Rydz Wullens
Ibrahim Taha
Mohammed Rauf
Johan Rumar Karlquist

March 2020

Innehåll

1	Gauss' sats	3
1.1	Gauss' sats (Divergenssatsen)	3
1.2	Reguljärt område	3
1.3	Bevisskiss till Gauss' sats för reguljära områden	3
1.4	Viktiga observationer	4
1.5	Fysikalisk tillämpning på Gauss' sats	4
2	Stokes' sats (10.3)	6
2.1	Rotation	6
2.2	Orienterat ytsycke	6
2.3	Stokes' sats	6
2.4	Bevis av Stokes' sats	6
2.5	Intressant observation	7
2.6	Fysikaliska tillämpningar	7
3	Nablaräkning	9
3.1	Bakgrund	9
3.2	Nablaoperatorn (∇)	9
3.3	Viktiga samband samt dess tolkningar	9
4	Potentialer	11
4.1	introduktion	11
4.2	Formler	11
4.3	Virvelfria fält och potentialfält	11

5	Optimeringsproblem	12
5.1	Introduktion	12
5.2	Repetition av kompakt mängd	12
5.3	Optimering i kompakta områden	13

1 Gauss' sats

Gauss' divergenssats är en av två generaliseringar av Greens sats som kan användas för beräkningar i $\mathbb{R}^3$. Den används när flödet ut ur slutna ytor, eller ytor som ganska lätt kan slutas, ska beräknas.

1.1 Gauss' sats (Divergenssatsen)

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1 -ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV. \quad (1)$$

1.2 Reguljärt område

Beviset till Gauss' divergenssats som kommer tas upp bygger på att området är reguljärt. Därför måste det först definieras vad det innebär med att vara ett reguljärt område.

Def: En kompakt och kvadrerbar mängd K i $\mathbb{R}^3$ sägs vara reguljärt m.a.p z om det finns en partition $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ så att

$$K_i = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_i, \varphi_i(x, y) \leq z \leq \psi_i(x, y)\}, \quad (2)$$

där D_i är en kompakt och kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^2$ och $\varphi_i(x, y)$ och $\psi_i(x, y)$ är C^0 -funktioner s.a. $\varphi_i(x, y) \leq \psi_i(x, y) \forall (x, y) \in D_i$.

Regularitet m.a.p. x resp. y definieras på analogt vis. K sägs vara reguljärt om K är reguljärt m.a.p. alla tre.

1.3 Beviskiss till Gauss' sats för reguljära områden

Beviset bygger på att ta en komponent i taget i (1) så att man först undersöker

$$\oint_{\partial K_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iiint_{K_i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV. \quad (3)$$

M.h.a. (2) kan man bevisa att dessa är lika genom att använda Fubinis sats på högerledet och sedan utnyttja att z ligger mellan två funktioner av x och y . Detta gör att x och y kan användas för parametrisering av topp och botten vilket i sin tur kan användas för att omformulera vänsterledet. Ytan mellan dessa funktioner har per definition i varje punkt en normelvektor som är parallell med xy -planet vilket leder till att skalärmultiplikeringen $(0, 0, F_3) \cdot \hat{N}$ blir noll. Efter lite räkning kommer man sedan fram till att H.L.=V.L.

Detta bevisar att (3) stämmer i ett delområde K_i . Nästa steg är att bevisa att addition av alla områden K_i i K ger

$$\oint_{\partial K} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV. \quad (4)$$

där högerledet är trivialt och en bild av alla områden K_i kan visa att alla inre ytor tar ut varandra så att endast kanterna blir kvar.

Slutligen kvarstår det att konstatera att samma räkningar kan göras för x och y om K är reguljärt m.a.p. dessa. Läger man sedan ihop detta ger addition av resultaten (1) ifall K är reguljärt.

1.4 Viktiga observationer

För att använda Gauss' sats krävs det att området som flödet ska beräknas genom är slutet. Ibland har man områden som inte är slutna men där satsen ändå kan vara till hjälp eftersom området lätt kan slutas med en yta genom vilken flödet är lätt att beräkna, till exempel om man vill räkna ut flödet ut genom en halvsfär.

Det bör även nämnas att Gauss' sats ger flödet ut ur en kropp. Vill man räkna ut flödet in i en kropp är det dock bara att lägga på ett minustecken på resultatet av Gauss' sats för att få fram svaret.

Slutligen är det viktigt att komma ihåg att Gauss' sats endast gäller för funktioner utan "hål" i området. Vill man till exempel räkna ut flödet av $\mathbf{F} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z)$ ner genom paraboloiden $\{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$ kan man inte använda Gauss' sats eftersom $\mathbf{F}$ inte är definierad längs med z -axeln.

1.5 Fysikalisk tillämpning på Gauss' sats

Betrakta Coulombs lag i elektrostatik

$$\mathbf{F} = \frac{CQq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (5)$$

där $\mathbf{F}$ är kraften, Q och q är laddningar på två partiklar, $\hat{\mathbf{r}}$ är vektorn mellan dessa, r är längden av vektorn $\hat{\mathbf{r}}$ och C är någon universell konstant. Det elektriska fältet $\mathbf{E}$ som produceras av laddningen Q definieras som

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{CQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Om K nu får vara ett klot med radie a kring Q kan man skriva

$$\oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{N} dS \stackrel{\hat{N}=\hat{\mathbf{r}}}{=} \oint_{\partial K} \frac{CQ}{a^2} dS = 4\pi CQ. \quad (7)$$

En generalisering av detta heter Gauss' lag för elektriskt flöde. Denna lag säger att det totala elektriska flödet ut genom en sluten yta är samma som

den totala elektriska laddningen i kroppen som omsluts av ytan multiplicerat med $1/\varepsilon$ (ε är den s.k. elektriska permittiviteten). För att vara konsekvent med tidigare räkning så är $C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$. Gauss lag uttryckt matematiskt ger

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{N} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho(x, y, z) dV, \quad (8)$$

där $\rho(x, y, z)$ är den så kallade laddningsdensiteten. Gauss' sats på detta ger

$$\iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \iiint_K \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} dV, \quad (9)$$

som gäller för godtyckligt K . Detta leder till likheten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}, \quad (10)$$

vilket är Maxwells första ekvation.

2 Stokes' sats (10.3)

2.1 Rotation

Def: Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett 3-dimensionellt C^1 -vektorfält. Då ges rotationen av $\mathbf{F}$ av

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \quad (11)$$

2.2 Orienterat ytskycke

Def: Antag att den orienterade C^1 -ytan Y har en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ och $(s, t) \in D$, alltså $Y = \mathbf{r}(D)$, där D är en kompakt delmängd av st-planet med positivt orienterad C^1 -rand ∂D . Ytstycket Y har i sådana fall en rand som definieras som $\partial Y = \mathbf{r}(\partial D)$ och Y sägs vara ett orienterat ytstycke med en orienterad rand ∂Y ifall ∂Y ärver orienteringen av ∂D .

2.3 Stokes' sats

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y , så gäller att

$$\int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (12)$$

2.4 Bevis av Stokes' sats

Vi bevisar satsen i ett specialfall då en yta Y är en del av en C^2 -funktionsyta, dvs.

$$Y = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, f \in C^2\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{VL} &= \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial Y} (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz) = \oint_{\partial Y} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \\ &= \{\text{funktionsyta kedjeregeln}\} = \oint_{\pi(Y)=\partial D} F_1 dx + F_2 dy + F_3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = \\ &= \oint_{\partial D} (F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}) dx + (F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}) dy = \{\text{Greens sats}\} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} (F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}) \right] dx dy \end{aligned}$$

Utveckla termerna med hjälp av kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}) &= \frac{\partial}{\partial x} F_2 + \frac{\partial}{\partial x} F_3 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

På samma sätt

$$\frac{\partial}{\partial y} (F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Man kan då utföra subtraktionen. Då $f \in C^2$ gäller Clairaut och de termer med både f_x och f_y tar ut varandra. Vi får att $\mathbf{VL}$ blir

$$\iint_D [-\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})] dxdy$$

$\mathbf{HL} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, där $\hat{\mathbf{N}} dS = +(-f_x, -f_y, 1) dxdy$ enligt formeln för en funktionsyta och vi får:

$$\iint_D [-\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})] dxdy = \mathbf{VL} \quad \square$$

2.5 Intressant observation

Ifall man skulle sätta in $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ i Stokes' sats, alltså att hela ytan befinner sig i xy-planet. så skulle man få ut en ekvation som ser ut såhär:

$$\oint_{\partial Y} F_1 dx + F_2 dy = \iint_Y (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dxdy \quad (14)$$

$\hat{\mathbf{N}}$ blir $(0, 0, 1)$ och dS blir $dxdy$, på grund av att hela ytan befinner sig i xy-planet. Detta leder till att HL endast består av den tredje termen i $(\nabla \times \mathbf{F})$. Notera att (14) är Greens sats, vilket måste betyda att Greens sats endast är ett specialfall av Stokes' sats.

2.6 Fysikaliska tillämpningar

Faradays lag säger:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_D \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = -\iint_D \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (15)$$

Tillämpning av Stokes' sats på vänsterledet av (15) ger:

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = -\iint_D \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS,$$

vilket leder till en av Maxwells ekvationer:

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (16)$$

Detta är även Faradays lag i differentialform.

Sedan har vi även Ampères lag som beskriver magnetfältet $\mathbf{B}$ utanför en lång rak ledare med strömmen I :

$$B = \mu \frac{I}{2\pi r} \iff B(2\pi r) = \mu I, \text{ där } B = \|\vec{B}\|$$

Genom att uttrycka vänsterledet av ekvationen som en linjeintegral längs en cirkel S som omsluter strömmen fås:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu I \quad (17)$$

Låt I vara summan av ett antal strömmar som omsluts av cirkelranden ∂S och som definierar strömtätheten $\mathbf{J}$. Flödesintegralen av strömtätheten över ytan som omsluts av cirkeln S ger oss den totala strömmen i ytan S , vilket gör att vi kan skriva om ekvationen till:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS. \quad (18)$$

Genom tillämpning av Stokes' sats erhålls:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_S \mu \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS, \quad (19)$$

vilket leder till Ampères lag i differentialform:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu \mathbf{J} \quad (20)$$

3 Nablaräkning

3.1 Bakgrund

Inom vektoranalysen används operationer som gradient, divergens och rotation för att undersöka hur skalär - och vektorfält beter sig. Detta görs med hjälp av den vektoriella derivationsoperatoren ∇ , (uttalas nabla).

3.2 Nablaoperatoren (∇)

Det gradient, divergens och rotation alla har gemensamt är att de tar del av de partiella derivationsoperatorerna $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$. Dessa partiella derivationsoperatorer kan sammanställas till en enda vektoriell operator, ∇ . ∇ definieras som

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (21)$$

I matematiska beräkningar beter sig ∇ som en normal tredimensionell vektor. Vid multiplikation med en skalär funktion f av tre variabler x_1, x_2, x_3 , kommer resultatet att bli

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right). \quad (22)$$

∇ är även användbart för vektorfält och kan användas för att skalärmultiplicera eller ta vektorprodukten av ∇ och ett vektorfält. För att exemplifiera detta, definieras vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Skalärprodukten ger ekvationen

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) = \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (23)$$

Vektorprodukten av ∇ och $\mathbf{F}$ blir

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{F}. \quad (24)$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är enhetsvektorer i $\mathbb{R}^3$.

3.3 Viktiga samband samt dess tolkningar

Ett antal samband som kan tillämpas för två C^2 -funktioner, vektorfältet $\mathbf{u}$ och skalärfältet f , är följande:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (26)$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) = \Delta. \quad (27)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (28)$$

Samband (25) ger att varje C^2 potentialfält är virvelfritt. Intuitivt, ∇ och ∇f är parallella, kommer deras kryssprodukt att bli $\mathbf{0}$. Definition (26) ger att $\nabla \times \mathbf{F}$ vara ortogonal mot både ∇ samt $\mathbf{F}$, vilket innebär att dess divergens är 0 för alla $\mathbf{F}$.

4 Potentialer

4.1 introduktion

Studiet av potentialer i rummet bygger på tidigare avsnitt, potentialfält i två dimensioner, därför kan man överföra de flesta definitioner samt resultat från planet till rummet med självklara modifikationer. Om vi betraktar kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 \quad (29)$$

kan vi säga att den är "oberoende av vägen" om dess värde bara beror på kurvans ändpunkter.

Ett potentialfält eller konservativt fält är ett fält $\mathbf{F}$ som i hela sin definitionsmängd kan skrivas

$$\mathbf{F} = \text{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \quad (30)$$

för någon funktion U , som kallas en *potential* till $\mathbf{F}$.

4.2 Formler

För potentialfält gäller formeln

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(b) - U(a), \quad (31)$$

där a och b är start respektive slutpunkt på kurvan γ . Kurvintegralen är således oberoende av vägen. Som i två dimensioner finner man också att potentialfältet är unikt i detta avseende, upp till en konstant.

I vissa sammanhang talar man om differentialformen istället för vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Differentialformen är

$$F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 \quad (32)$$

4.3 Virvelfria fält och potentialfält

Def: Ett C^1 - fält $F: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ sägs vara virvelfritt om $\text{rot}(F) = 0$

Sats 10.5.3

Varje C^2 -potentialfält är virvelfritt. Bevis: Se ekvation (16) i avsnitt 3.3.

Viktigt att notera är att alla virvelfria fält inte är potentialfält, att villkoret inte ensamt räcker för att garantera existensen av en potential i hela

definitionsområdet för $\mathbf{F}$. Det beror på dess lokala karaktär men måste kompletteras med något globalt krav för att $\mathbf{F}$ säkert skall ha en potential. Ett sådant krav är att definitionsområdet Ω för $\mathbf{F}$ är enkelt sammanhängande. Beskrivningen av enkla sammanhängande mängder i planet som områden som saknar hål duger inte i rummet. I tre dimensioner definierar vi detta begrepp genom kravet att varje enkel sluten kurva i Ω kan deformerats kontinuerligt till en punkt i Ω utan att området någonsin lämnas. För en kurva som inte är alltför egendomlig är detta liktydigt med att kurvan utgör rand till en orienterad yta som ligger helt och hållet i Ω .

Sats 10.5.4

Om vektorfältet $\mathbf{F}$ är virvelfritt i ett öppet enkelt sammanhängande område Ω i $\mathbb{R}^3$ så har $\mathbf{F}$ en potential i Ω .

Bevis

Enligt Sats 9.3 i boken är vi klara om vi kan visa att kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i Ω , dvs att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (33)$$

för varje enkel sluten kurva γ i Ω . Vi visar detta bara i det fall då γ är rand till en yta Y i Ω . Då ger Stokes' sats att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm \int \int_Y (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS = 0 \quad (34)$$

och därmed är det bevisat.

5 Optimeringsproblem

5.1 Introduktion

Optimering är en gren av matematiken där samband med en eller flera frihetsgrader undersöks för att få optimalt resultat av en rent matematisk modell eller en förenkling av ett verkligt samband.

5.2 Repetition av kompakt mängd

Ett viktigt begrepp inom optimering är *kompakta mängder*, och därför repeteras här definitionen av en kompakt mängd samt en sats som är ett viktigt hjälpmedel för att lösa optimeringsproblem.

Def. En mängd i $\mathbf{R}^n$ kallas kompakt om den är begränsad och sluten.

Med vetenskapen om vad en kompakt mängd är kan nu den sats som kommer användas vid optimering på kompakta områden att beskrivas.

Sats. Om f är en reellvärd kontinuerlig funktion med en kompakt definitionsmängd D så antar f både ett största och ett minsta värde i D .

5.3 Optimering i kompakta områden

Enligt satsen i förra stycket så vet vi att det finns ett minsta och största värde för en reellvärd funktion definierad i en kompakt mängd. Detta gör att vi inte behöver ställa oss frågan om huruvida optimering är möjligt, och om f är av typ C^1 kan det givna problemet istället angripas med följande metod (värt att notera är att det såklart kan förekomma max och minvärden i icke-kompakta mängder):

Antag att vi vill optimera f som är definierad i en kompakt mängd Q . Maxpunkten kan då antingen tillhöra mängden Q s inre eller randen ∂Q . För att då hitta maxvärdet kan man börja med att hitta alla lokala maxvärden i mängdens inre och jämföra dem med maxvärdet för punkter som ligger på randen.

Alla extremvärden i mängden Q 's inre är lokala max- eller minvärden. Som vi vet sen tidigare är dessa extrempunkter *p stationära punkter*, det vill säga att funktionens alla partiella derivator i punkten är 0 ($\nabla f = \mathbf{0}$). Maxvärdet för punkter i mängdens inre blir då:

$$\max(f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_k)) \quad (35)$$

där k är antalet stationära punkter i mängdens inre.

Att beräkna funktionens f 's maxvärde för punkter som ligger längs randen är ofta relativt enkelt. T.ex. i R^2 kan randen beskrivas av en parameter, vilket ofta gör det till ett relativt triviale problem att hitta funktionens maxvärde på randen.

Det är dock viktigt att minnas att i vissa fall så kan randen till en mängd ha en rand, som i dimensioner högre än 2 i sin tur också ha en rand etc. Till exempel har en tetrader sin volym som inre mängd, och sina sidor som rand. Dessa sidor har i sin tur tetraedernas kanter som rand, och slutligen har kanterna tetraedernas hörn som rand. Funktionens värde i dessa punkter måste då såklart jämföras med andra maxvärdes-kandidater på randerna och mängdens inre.

Mer precist så förenklas beräkning av maxvärden på randen till optimering av en funktion av en variabel för de intervall som utgör randerna till

mängden. Det störta och minsta av de kandidater man får av denna optimering kombinerat med inre mängdens extrempunkter resulterar i funktionens maximum respektive minimum på den kompakta mängden.