

Flervariabelanalys vecka 7

Andreas Jonsson (*jonssa@student.chalmers.se*)
Alfred Juhlin-Onbeck (*ojuhlin@student.chalmers.se*)
Lidija Katić (*lidijak@student.chalmers.se*)
Linus Lemner (*lemner@student.chalmers.se*)

20 April, 2020

1 Gauss divergenssats (sats 10.2.1)

Sats: Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1 -ytor och som är positivt orienterad med utåtriktad normal så gäller

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV. \quad (1)$$

Bevisidé: För att bevisa satsen kan man börja med att visa att den gäller för reguljära områden och sedan visa man att den även gäller för områden som kan partitioneras i ändligt många reguljära delar. För att visa att satsen gäller för reguljära områden kan vi dela upp ekvationen och behandla x , y och z separat. Eftersom de behandlas analogt räcker det med att visa en. I z -led gäller

$$\oint_{\partial K} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz. \quad (2)$$

Högerledet i (2) kan med hjälp av Fubinis sats skrivas om till

$$\text{HL} = \iint_D [F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y))] dx dy \quad (3)$$

där g och f är den övre och undre funktionsytan till K , och D är definitionsmängden till g och f . Om ytintegralen i vänsterledet i (2) delas upp i den övre och den undre funktionsytan samt en eventuell yta i mitten, så kommer bidraget från mittenytan bli noll vid multiplikation med normalvektorn $\hat{\mathbf{N}}$ och det som står kvar kommer efter omskrivning vara lika med högerledet.

2 Stokes sats (sats 10.3.2)

Sats: Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ystykke¹ i Ω med orienterad rand² ∂Y så gäller

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (4)$$

Bevisidé (specialfall): Satsen som vi har bevisat i kursen är specialfallet då Y är en del av en C^2 -funktionsyta. Vid utveckling av vänsterledet kan z då skrivas om som en funktion av x och y . Eftersom funktionsytan har en kontinuerlig andraderivata kan Greens sats användas för att skriva om den slutna kurvintegralen till en dubbelintegral. Efter utveckling med kedjeregeln är vänsterledet lika med högerledet.

¹Om ett ystykke är orienterat betyder det att kryssprodukten av ystyckets normal och randens tangent pekar mot ystycket om randen är positivt orienterad och ifrån om den är negativt orienterad.

²En rand är (positivt) orienterad om dess område ligger till vänster om randen då den genomlöps i positiv riktning.

3 Förhållandet mellan begreppen virvelfritt och konservativt (i $\mathbb{R}^3$)

Ett C^1 -vektorfält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sägs vara virvelfritt om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

3.1 Sats 10.5.3

Om $\mathbf{F} = \nabla\phi$ och $\phi \in C^2 \implies \mathbf{F}$ virvelfritt (Sats 9.4.4 säger samma sak i $\mathbb{R}^2$).

3.2 Bevis för satsen

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \nabla\phi &\implies F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ \implies \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \right) \stackrel{\text{Clairaut}}{=} (0, 0, 0)\end{aligned}$$

□

3.3 Sats 9.4.5 ($\mathbb{R}^2$)

$\mathbf{F}$ är virvelfritt $\implies \mathbf{F}$ är konservativt, så länge definitionsmängden är enkelt sammanhängande.

Men definitionen för enkelt sammanhängande som vi har givit i $\mathbb{R}^2$ fungerar ej för $\mathbb{R}^3$, ty en enkel, sluten kurva γ delar ej $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma$ i två sammanhängande komponenter.

3.4 Definition av enkelt sammanhängande i $\mathbb{R}^3$

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω sägs vara enkelt sammanhängande om

(i) Ω är sammanhängande (dvs när alla par av punkter i Ω kan förbindas med en kurva utan att lämna Ω).

(ii) varje enkel, sluten kurva γ i Ω kan kontrakteras kontinuerligt till en enda punkt utan att lämna Ω .

3.5 Sats 10.5.4 ($\mathbb{R}^3$)

Om $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ är virvelfritt och Ω är enkelt sammanhängande, så är $\mathbf{F}$ konservativt.

3.6 Bevis av satsen

Det räcker enligt Sats 9.4.3 (bevisat på föreläsningar för $\mathbb{R}^n$) att visa att

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

för varje enkel, sluten kurva γ i Ω .

Låt γ vara en sådan kurva. Ty Ω är enkelt sammanhängande så kan γ kontinuerligt kontrakteras till en punkt inom Ω . Låt Y vara ytan i Ω som sveps ut under kontraktionen. Då är $\gamma = \pm \partial Y$ ($\pm$ ty vi vet ej hur γ är orienterad med avseende på Y)

$$\implies \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0$$

ty $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ enligt antagande. □

4 Nablaräkning (i $\mathbb{R}^3$)

Nabla är en vektorvärd differentialoperator som betecknas:

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Nablaoperatorn används för att underlätta räknandet av gradienten (grad) till ett skalärfält ϕ av klassen C^1

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \text{grad } \phi,$$

divergensen (div) av vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ av klassen C^1

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{div } \mathbf{F}$$

och rotationen (rot / curl) av $\mathbf{F}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \text{curl } \mathbf{F}.$$

4.1 Viktiga identiteter inom nablaräkning

Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ och $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^2 -fält, då har vi följande identiteter:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\text{div curl} = 0) \quad (1),$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \quad (\text{curl grad} = \mathbf{0}) \quad (2),$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (\text{curl curl} = \text{grad div} - \text{Laplacian}) \quad (3).$$

4.2 Bevis av identiteterna

1). Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^2 -fält så att vi med definitionen av div och curl får

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{F})_1 + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{F})_2 + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{F})_3 \\ &\quad \Downarrow \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &\quad \Downarrow \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} = 0,\end{aligned}$$

enligt *Clairauts* sats om att en funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^2$ satisfierar

$$f_{ij} = f_{ji} \implies \frac{\partial^2 F_k}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial y \partial x}, k = \{1, 2, 3\}.$$

Alltså $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (alla rotationsfält är källfria). □

2). Detta bevisades på sida 3 (Bevis 3.2).

3). Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^2 -fält. Då är

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &\quad \Downarrow \\ &= \mathbf{e}_x \left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \right] + \mathbf{e}_y \left[\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} \right] + \\ &\quad + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} \right] \\ \text{För HL} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) &= \mathbf{e}_x \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \right] + \mathbf{e}_y \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} \right] + \\ &\quad + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right]\end{aligned}$$

och Laplacian / Laplaceoperatorn (Δ)

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Då är HL:

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} &= \mathbf{e}_x \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \right] + \mathbf{e}_y \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} \right] + \\
&\quad + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right] - \mathbf{e}_x \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right] \\
&\quad - \mathbf{e}_y \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right] - \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right] \\
&\quad \Updownarrow \\
&= \mathbf{e}_x \left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \right] + \mathbf{e}_y \left[\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} \right] + \\
&\quad + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} \right]. \\
&\implies \text{HL} = \text{VL}.
\end{aligned}$$

□

5 Maxwells ekvationer

Maxwells ekvationer (i form av partiella differentialekvationer):

$$\begin{aligned}
i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} && (\text{Gauss lag}), \\
ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (\text{Gauss lag för magnetism}), \\
iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (\text{Faradays lag}), \\
iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (\text{Ampères lag med Maxwells korrigering}).
\end{aligned}$$

Här gäller att ρ är laddningstätheten, $\mathbf{J}$ är den elektriska strömtätheten, ϵ och μ är mediets elektriska permeabilitet respektive magnetiska permittivitet. Maxwells ekvationer beskriver:

- i) sambandet mellan ett statiskt elektriskt fält och de elektriska laddningarna som orsakar fältet – Gauss lag,
- ii) hur inga magnetiska monopoler existerar, med andra ord att magnetfältet är källfritt – Gauss lag för magnetism,
- iii) hur ett tidsberoende magnetfält medför ett elektriskt fält – Faradays induktionslag,
- iv) hur magnetiska fält kan uppstå både ur flöden av elektriska laddningar och ur varierande elektriska fält – Ampères lag med Maxwells korrigering.

5.1 Maxwells första ekvation - kopplingen till Gauss lag

Gauss lag för elektrostatiskt flöde: 'The total electric flux through a closed surface equals $1/\varepsilon$ times the net electric charge within that closed surface.' Rent matematiskt betyder det att:

$$\oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho dV$$

och enligt Gauss divergenssats

$$\text{VL} = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \iiint_K \frac{\rho}{\varepsilon} dV.$$

Alltså $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$.

5.2 Maxwells ekvationer i vakuum (specialfall)

$$\text{Vakuum} \implies \left. \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{0} \\ \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}, \quad \rho = 0 \end{array} \right\}$$

Då blir Maxwells ekvationer:

$$\begin{array}{ll} i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array}$$

Genom att tillämpa $[\mathbf{F} = \mathbf{E}]$ i den tredje identiteten får vi

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}.$$

$$\text{HL} : \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \stackrel{\text{ekv. } i}{=} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}.$$

$$\text{VL} : \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \stackrel{\text{ekv. } iii}{=} \nabla \times \left(\frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Clairaut}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) =$$

$$\stackrel{\text{ekv. } iv}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \mu_0 \varepsilon_0.$$

$$\text{VL} = \text{HL} \implies \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Påminnelse: den 1-dimensionella vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

har den allmänna lösningen $f(x, t) = H_1(x - ct) + H_2(x + ct)$ där $H_1, H_2 \in C^2$, med andra ord en superposition av höger respektive vänstergående vågor med fart c . För elektromagnetiska vågor i vakuum blir det:

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \iff c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \text{ (exakt värde)}.$$

6 Optimering på kompakta områden

Vid optimering söks det största och/eller minsta värdet av en reellvärd funktion $f(x)$ definierad på en kompakt mängd i $\mathbb{R}^n$. Om en kontinuerlig funktion $f(x)$ är definierad på en kompakt mängd K i $\mathbb{R}^n$ följer enligt sats 1.4 att max/minvärden finns för funktionen.

6.1 Kontinuerliga funktioner (Sats 1.4)

Om f är en reellvärd kontinuerlig funktion med kompakt definitionsmängd D så har f såväl ett största som ett minsta värde på D .

6.2 Beräkning av största och minsta funktionsvärde

För att beräkna största och minsta funktionsvärde till en C^1 -funktion, samt ange i vilka punkter dessa värden antas kan en rekursiv strategi enligt nedan användas.

En extrempunkt för f måste a priori antingen vara en inre punkt i K eller en randpunkt, dvs. en punkt i ∂K .

Steg 0: Sätt

$$\begin{aligned} R &:= K \\ g &:= f \end{aligned}$$

Steg 1: Bestäm alla lokala extrempunkter i regionen R . Om ett extremvärde antas i en inre punkt så måste det vara ett lokalt extremum. I fallet $g \in C^1$ så vet vi att varje lokal extrempunkt är en kritisk punkt, därmed behöver endast ekvationssystemet $\nabla g = \vec{0}$ lösas.

Steg 2: Bestäm en parametrisering av ∂R enligt $\Gamma : D \rightarrow \partial R$, där $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{aligned} R &:= \partial K \\ g &:= g \circ \mathbf{r} \end{aligned}$$

Gå till steg 1: Det är möjligt att fortsätta undersökningen så länge parametriseringen av randen också är C^1 .

Exempel: Bestäm det största och minsta värdet av

$$f(x, y) = x + x^2 + y^2 \tag{5}$$

på den kompakta cirkelskivan $K : x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning: De stationära punkterna bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0, \end{cases}$$

som har den enda lösningen $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0)$. Denna punkt ligger i det inre området av K och utgör därför en av de möjliga punkterna i vilka f kan anta sitt största respektive minsta värde. Funktionen uppförande på randen av K fås genom att till exempel parametrisera enhetscirkeln,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (6)$$

och studera funktionen av en variabel

$$\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = \cos t + 1$$

i intervallet $[0, 2\pi]$. Största värdet för φ är då 2, vilket inträffar för $t = 0$, och dess minsta värde är $\varphi(\pi) = 0$. Funktionen f 's största och minsta värde finns alltså att söka bland talen $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$, $f(1, 0) = 2$ $f(-1, 0) = 0$. Det största värdet är då $f(1, 0) = 2$ och det minsta värdet är $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$. $\square$