

MVE035

Adam Burman (adambu), Ludvig Nordqvist (ludnor),
Isak Lundgren (isaklun), Markus Utterström (markusu),
Didrik Palmqvist (didrikp), Jonathan Lind (jonatali)

March 2020

1 Kurvintegraler

En kurva kan beskriva rörelsen för partiklar. Detta görs med en parametrisering

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) | \alpha \leq t \leq \beta\} \quad (1)$$

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Från fysiken känner vi igen att arbetet är $W = Fx$ detta kan generaliseras till kurvintegralen

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (3)$$

vilket vanligen skrivs som

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4)$$

Vilket är notationen för en given kurvintegral.

Det går även att dela in kurvor i olika grupperingar enligt följande definitioner.

Definition av en sluten kurva:

$$\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta) \quad (5)$$

där $\mathbf{r}(\alpha)$ är startpunkten för kurvan och $\mathbf{r}(\beta)$ är slutpunkten. Följande så är definitionen av en enkel kurva:

$$\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2), \alpha \leq t_1 < t_2 < \beta \quad (6)$$

där $\mathbf{r}(t_1)$ och $\mathbf{r}(t_2)$ är två godtyckliga skilda punkter på kurvan.

Detta låter oss sedan visa Jordans kurvsats: låt γ vara en enkel sluten C^0 -kurva. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter.

Med hjälp av denna sats går det att göra följande definition. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område vars rand ∂D består av ett eller flera C^1 -kurvor. Randen ∂D sägs vara positivt orienterad om D ligger till vänster om färdriktningen. Därmed så är positiv orientering samma sak som moturs förutsatt att D inte innehåller några hål.

2 Konservativa vektorfält & potential

Definition:

Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält. $\mathbf{F}$ sägs då vara konservativt om det finns ett skalärfält $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $\mathbf{F} = \nabla U$.

Sats 9.4.2

Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett konservativt vektorfält så att $\mathbf{F} = \nabla U$, definierad i en öppen mängd D och låt γ vara en kurva i D . Då gäller att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(b) - U(a) \quad (7)$$

där a, b är start-/slutpunkter för γ . En konsekvens av detta är att

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (8)$$

då γ är en sluten kurva.

Funktionen U kalla för potentialen till den vektorvärda funktionen $\mathbf{F}$.

Bevis av sats 9.4.2

Tag en kurva γ med C^1 parametriseringen

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) | a \leq t \leq b\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \cdot dt = \int_a^b \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) dt = \{\text{kedjeregeln}\} = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) dt = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)) = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Sats 9.4.3

Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd D . om $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen så har $\mathbf{F}$ en potential i D .

Bevis av 9.4.3

Välj en godtycklig baspunkt $\mathbf{a} \in D$. Vi definierar en funktion $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ enligt $U(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är en godtycklig C^1 kurva inom D som går från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$. Förutsättningarna innebär att U är väldefinierad. Vi hävdar nu att $\mathbf{F} = \nabla U$. Sätt $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$. Vi måste då visa att för $i = 1, \dots, n$ att $U'_{x_i} = F_i$. Fixera ett i . Per definition:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - U(\mathbf{x})}{h}$$

infoga definition av U ovan så att

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$U(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där γ_1, γ_2 är valfria (styckvis) C^1 -kurva D från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$ respektive $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$, dvs $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3$ där $\gamma_3 = \{\mathbf{x} + ht\mathbf{e}_i | 0 \leq t \leq 1\}$ (då är γ_2 styckvis C^1).

$$U(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - U(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x} + ht\mathbf{e}_i) \cdot h\mathbf{e}_i dt = h \int_0^1 F_i(\mathbf{x} + ht\mathbf{e}_i) dt$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(\mathbf{x} + ht\mathbf{e}_i) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_i(\mathbf{x} + u\mathbf{e}_i) du = F_i(\mathbf{x})$$

ty integralen är ett medelvärde av F_i på sträckan med längd h och F_i är kontinuerlig.

Definition

Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Då är $\nabla \times \mathbf{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$.

Definition

Låt $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^1 vektorfält, där D är en öppen mängd i $\mathbb{R}^3$. $\mathbf{F}$ är irrotationsfritt om, och endast om $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, överallt i D .

Sats 10.5.3

Om $\mathbf{F}$ är ett konservativt fält i den öppna mängden $D \subseteq \mathbb{R}^3$ med potential $U \in C^2$, så är $\mathbf{F}$ även virvelfritt.

Bevis

$\mathbf{F}$ är konservativt $\rightarrow \mathbf{F} = \nabla U$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla U) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \quad (10)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) = \mathbf{0} \quad (11)$$

Ty $U \in C^2 \rightarrow$ Clairaut gäller $\square$

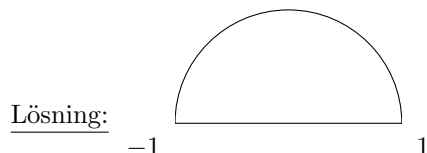
3 Greens Sats i $\mathbb{R}^2$

Låt P och Q vara två C^1 funktioner definerade i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Om det kompakta området D i Ω har en rand ∂D som utgöres av en eller flera styckvis C^1 -kurvor och som är positivt orienterade. Då är

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (12)$$

3.1 Användningsområden

Exempel: Greens sats används enklast på slutna kurvor men kan även användas på icke slutna kurvor. Beräkna $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ och $\mathbf{F}(x, y) = (P, Q)$ där γ är övre halvan av enhetscirkeln genomlöpt moturs. Insidan av cirkeln är området D .



För att kunna tillämpa Greens sats på denna kurva krävs det en till kurva från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ som vi kallar γ_2 . För att sedan beräkna kurvintegralen appliceras Greens sats minus bidraget från den tillagda kurvintegralen. Uträkningen ser ut som följer

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\gamma_2} P dx + Q dy. \quad (13)$$

Exempel: Beräkna area med hjälp av Greens sats. Greens sats kan även tillämpas när en area ska beräknas. För att beräkna arean av området D så sätts $P = 0$ och $Q = x$ vilket leder till att

$$\oint_{\partial D} x dy = \text{Area}(D). \quad (14)$$

Det går även att utföra beräkningen i y -led. Då utförs samma beräkning som ovan fast man sätter $P = -y$ och $Q = 0$ vilket i sin tur leder till

$$\oint_{\partial D} y dx = \text{Area}(D). \quad (15)$$

3.2 Definition av regulärt område

Ett begränsat och kvadrerbart område D , vilket ligger i $\mathbb{R}^2$, sägs vara regulärt i x -led om det finns en ändlig partition av D där varje element D_i kan skrivas på formen:

$$D_i = \{(x, y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\} \quad (16)$$

Där $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ är C^0 funktioner då $x \in [a_i, b_i]$ D sägs vara regulärt i x -led om samma princip kan appliceras för x utbytt mot y , samt vice versa. D sägs vara regulärt om D är regulärt i både x -led och y -led.

3.3 Bevis av Greens sats

Steg 1:

Antag att D är regulärt i x -led; Beviset inleds genom att visa att uttrycket

$$\oint_{\partial D_i} P dx = \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (17)$$

gäller för alla delar i av området D . Vänsterledet betraktas först, där randen ∂D_i kan representeras av 4 kurvor $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, och γ_4 . Vänsterledet kan då skrivas ekvivalent som

$$\oint_{\partial D_i} P dx = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx + \int_{\gamma_3} P dx + \int_{\gamma_4} P dx, \quad (18)$$

där γ_1 representerar funktionskurvan $\alpha_i(x)$, där $a_i \leq x \leq b_i$ i riktning med ökande värden för x ; γ_2 representerar en linje från $(b_i, \alpha_i(b_i))$ till $(b_i, \beta_i(b_i))$; γ_3 representerar funktionskurvan $\beta_i(x)$, där $a_i \leq x \leq b_i$ i riktning med minskande värden för x och γ_4 representerar en linje från $(a_i, \beta_i(a_i))$ och $(a_i, \alpha_i(a_i))$. Vänsterledet kan, ty differensen i γ_2, γ_4 med avseende på x är 0 och γ_1, γ_3 tillhör funktionskurvor, då ställas upp som

$$\int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx + \int_{b_i}^{a_i} P(x, \alpha_i(x)) dx. \quad (19)$$

Högerledet kan enligt Fubinis sats skrivas ekvivalent som

$$\iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{a_i}^{b_i} \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx, \quad (20)$$

Vilket vidare kan utvecklas som

$$\int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx + \int_{b_i}^{a_i} P(x, \alpha_i(x)) dx. \quad (21)$$

Vänsterledet har då visats vara ekvivalent med högerledet, vilket skulle visas.

Steg 2:

Beviset fortsätts nu med att visa att man kan summera alla delar av partitionen för detta förhållande och få samma förhållande, enligt

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy \iff \oint_{\partial D} P dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (22)$$

För att bevisa vänsterledens ekvivalens kollar man på alla ränder till delområden, om de ligger intill varandra. I detta fall kommer alla inre kurvor i området att ta ut varandra, kvarvarande är endast de kurvor som utgör randen ∂D , vilket bevisar ekvivalensen. Beviset för högerledets ekvivalens är i princip trivialt, då att integrera över delar av områden för att sedan summera upp värdena är en metod i sig för att beräkna integralen över hela området.

Steg 3:

Analogt till tidigare steg kan beviset även föras att, om D är regulärt i y -led gäller förhållandet

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy, \quad (23)$$

vilken om kombinerat med det första förhållandet ger det bevisade uttrycket

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \square \quad (24)$$

4 Flödesintegraler

4.1 Introduktion

Definition:

Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett integrerbart vektorfält och låt $K \in \mathbb{R}^3$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd vars rand ∂K är en styckvis C^1 -yta. Flödet av $\mathbb{F}$ ut från K ges av

$$\oint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \hat{N} dS \quad (25)$$

där $\hat{N}$ är en enhetsnormal till ∂K som alltid pekar ut från K .

Språkbruk:

”Flödet av $\mathbb{F}$ ut från K ” är ekvivalent med ”Flödet av $\mathbb{F}$ ut genom ∂K ”.

4.2 Beräkning av flödesintegraler

Metod 1: Välj lämplig parametrisering av ytan och beräkna tillhörande dubbelintegral(er) direkt.

$$\begin{aligned} \vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \end{aligned} \quad (26)$$

dS är areaelementet på ytan som är $|\vec{r}_s \times \vec{r}_t| ds dt$ med $|\vec{r}_s \times \vec{r}_t|$ ortogonal mot ytan,

$$\implies \hat{N} dS = \pm (\vec{r}_s \times \vec{r}_t) ds dt \quad (27)$$

där $\pm$ bestäms från fall till fall. Vi har då likheten

$$\oiint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \hat{N} dS = \pm \iint_{\pi(\partial K)} \mathbb{F} \cdot (\vec{r}_s \times \vec{r}_t) ds dt \quad (28)$$

vilken säger hur integralen kan behandlas.

Kom ihåg:

Specialfallet av en funktionsyta $Y = \{(x, y, z = f(x, y)) | (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} \implies (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) dx dy &= (-f_x, -f_y, 1) dx dy \\ \implies \iint_Y \mathbb{F} \cdot \hat{N} dS &= \pm \iint_D \mathbb{F} \cdot (-f_x, -f_y, 1) dx dy \end{aligned} \quad (29)$$

Exempel: (Coloumbs lag)

Kom ihåg Coloumbs lag i elektrostatik

$$\mathbb{F} = \frac{CQq}{r^2} \hat{r}. \quad (30)$$

Det elektrostatiske fältet $\mathbb{E}$ som produceras av en punktladdning Q definieras som $\mathbb{E} = \frac{CQ}{r^2} \hat{r} \implies \mathbb{F} = q\mathbb{E}$.

$$\mathbb{E} = \frac{CQ}{|\vec{r}|^2} \hat{r} = \frac{CQ}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \vec{r} \neq \vec{0}. \quad (31)$$

Beräkna flödesintegralen

$$\oiint_{\Sigma_R} \mathbb{E} \cdot \hat{N} dS \quad (32)$$

för en sfär Σ_R med medelpunkt i $\vec{r}_Q$, radie R och utåtriktad normal.

Lösning: Den utåtriktade enhetsnormalen N i punkten $\vec{r}$ på Σ_R ges av $\hat{N} = \frac{\vec{r}}{R}$. Eftersom $|\vec{r}| = R$ och $\mathbb{E} = \frac{\vec{r}}{R^3}$ på sfären Σ_R blir

$$\oint_{\Sigma_R} \mathbb{E} \cdot \hat{N} dS = \oint_{\Sigma_R} \frac{\vec{r}}{R^3} \cdot \frac{\vec{r}}{R} dS = \frac{1}{R^4} \oint_{\Sigma_R} |\vec{r}|^2 dS = \frac{1}{R^2} \oint_{\Sigma_R} dS \quad (33)$$

Men eftersom $\oint_{\Sigma_R} dS = \text{area}(\Sigma_R) = 4\pi R^2$ så är integralen

$$\oint_{\Sigma_R} \mathbb{E} \cdot \hat{N} dS = 4\pi \quad (34)$$

oberoende av sfärens radie. Notera även att både det elektrostatiska fältet och gravitationsfältet $\mathbb{F} = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ skalar med $\mathbb{F} \propto 1/r^2$

References

Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer. 2005. *Analys i flera variabler*. 3:6. uppl. Lund: Studentlitteratur AB.