

Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 10.juni.2019

Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.

Maximalt antal poäng: 80.

Hjälpmedel: BETA.

Examinator: Julie Rowlett.

Telefonvakt: Julie Rowlett (3419)

1. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & t, x > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \in \mathcal{L}^2((0, \infty)) \cap \mathcal{C}^0((0, \infty)) & x > 0 \end{cases}$$

(10 p)

2. Lös problemet:

$$\begin{cases} u(0, t) = \cos(t) & t > 0 \\ u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & t, x > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

(10 p)

3. Lös ekvationen:

$$u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} u(\tau) d\tau = \frac{1}{1+t^2}.$$

(10p)

4. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \cos(x) & 0 < t, 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = x^2 - 1 & x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(1, t) & t > 0 \end{cases}$$

(10p)

5. Beräkna:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{e+n}.$$

(Tips: beräkna Fourier-serien av den 2π periodiska funktionen som är lika med $\cos(ex)$ i intervallet $(-\pi, \pi)$.)

(10p)

6. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = 0 \\ u(0, y) = y - y^3, & u(2, y) = 0. \end{cases}$$

(10p)

7. (Bevisa Samplingsatsen) Låt $f \in L^2(\mathbb{R})$. Antar att det finns $L > 0$ så att om $|x| > L$, $\hat{f}(x) = 0$. Visa att gäller:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(n\pi - tL)}{n\pi - tL}.$$

(10p)

8. (Generating function for Bessel functions) Bevisa att $\forall x \in \mathbb{R}$ och $z \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$ Bessel funktionerna, J_n , uppfyller

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}.$$

(10 p)

Fourier transforms

In these formulas below $a > 0$ and $c \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
$f(x - c)$	$e^{-ic\xi} \hat{f}(\xi)$
$e^{ixc} f(x)$	$\hat{f}(\xi - c)$
$f(ax)$	$a^{-1} \hat{f}(a^{-1}\xi)$
$f'(x)$	$i\xi \hat{f}(\xi)$
$xf(x)$	$i(\hat{f})'(\xi)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$
$f(x)g(x)$	$(2\pi)^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
$e^{-ax^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a} e^{-\xi^2/(2a)}$
$(x^2 + a^2)^{-1}$	$(\pi/a) e^{-a \xi }$
$e^{-a x }$	$2a(\xi^2 + a^2)^{-1}$
$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$	$2\xi^{-1} \sin(a\xi)$
$x^{-1} \sin(ax)$	$\pi \chi_a(\xi) = \begin{cases} \pi & \xi < a \\ 0 & \xi > a \end{cases}$

$$H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Laplace transforms

In these formulas below, $a > 0$ and $c \in \mathbb{C}$.

$H(t)f(t)$	$\widetilde{f}(z)$
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-az}\widetilde{f}(z)$
$H(t)e^{ct}f(t)$	$\widetilde{f}(z-c)$
$H(t)f(at)$	$a^{-1}\widetilde{f}(a^{-1}z)$
$H(t)f'(t)$	$z\widetilde{f}(z) - f(0)$
$H(t)\int_0^t f(s)ds$	$z^{-1}\widetilde{f}(z)$
$H(t)(f * g)(t)$	$\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$
$H(t)t^{-1/2}e^{-a^2/(4t)}$	$\sqrt{\pi}/ze^{-a\sqrt{z}}$
$H(t)t^{-3/2}e^{-a^2/(4t)}$	$2a^{-1}\sqrt{\pi}e^{-a\sqrt{z}}$
$H(t)J_0(\sqrt{t})$	$z^{-1}e^{-1/(4z)}$
$H(t)\sin(ct)$	$c/(z^2 + c^2)$
$H(t)\cos(ct)$	$z/(z^2 + c^2)$
$H(t)e^{-a^2t^2}$	$(\sqrt{\pi}/(2a))e^{z^2/(4a^2)}\operatorname{erfc}(z/(2a))$
$H(t)\sin(\sqrt{at})$	$\sqrt{\pi a/(4z^3)}e^{-a/(4z)}$

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.