Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 5.juni.2018
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson 5325

1. Låt f vara en 2π-periodisk funktion med $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (dvs f är deriverbar). Fourierkoefficienterna av f,
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$
och Fourierkoefficienterna av f'
$$c_n' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx.$$
Bevisa att Fourierkoefficienterna c_n av f och Fourierkoefficienterna c_n' av f' uppfyller
$$c_n' = inc_n.$$
(10 p)

2. Låt $g \in L^1(\mathbb{R})$ med
$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1.$$
Antar att f är kontinuerlig och begränsad. Låt
$$g_\epsilon(x) = \frac{g(x/\epsilon)}{\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$
Bevisa:
$$\lim_{\epsilon \to 0} f * g_\epsilon(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
(Här betyder $*$ faltning eller "convolution" på engelska.) (10 p)

3. Beräkna den komplexa Fourierserien till den 2π-periodiska funktion $f(x)$ som är lika med $\cosh(x)$ i $(-\pi, \pi)$. Vad är seriens summa i punkten 2π? (10 p)

4. Hitta polynomet, p, av högst grad två som minimera
$$\int_{-2}^{2} |\sinh(x) - p(x)|^2 dx.$$
(10 p)

5. Lös problemet:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= e^{x+t}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= v(x), \\ u_x(0,t) &= 0, \\ u_x(4,t) &= 0. \end{aligned}$$

(10 p)

6. Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = G(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = v(x).$$

(10 p)

7. Lös problemet i annulusen:

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, |\theta| \leq \pi \\ u(1,\theta) = 0 & |\theta| \leq \pi \\ u(2,\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} & |\theta| \leq \pi. \end{cases}$$

(10 p)

8. Om $f(x)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ vad är Fouriertransformen av $\cos(x)f(x/2)$?

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.