

Fourieranalys MVE 030

2009-03-13 Lösningar

1. Intervallet $(0, \infty)$ och vikten $w(x) = x e^{-x}$ hänvisar på Laguerrepolyn.

L_n^1 . Så, ges bästa approximation av

$$p = c_0 L_0^1 + c_1 L_1^1 + c_2 L_2^1 + c_3 L_3^1$$

där
$$c_n = \frac{\langle e^{-2x}, L_n^1 \rangle_w}{\|L_n^1\|_w^2}$$

Täljaren beräknas som vi gjorde på övningen, 6.5:6, nämnaren tar vi Beta eller Folland, $\|L_n^1\|_w^2$

$$= \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = n+1.$$

2 Enligt Parseval och faltningformel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g * f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

beräknas direkt, resultat
har olika formen för $\alpha \leq 1$,

$\alpha \in [1, 4]$ och $\alpha > 4$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g * f(t) * f(t)|^2 dt \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^4 d\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{it} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{f}(1) + \hat{f}(-1)]. \end{aligned}$$

Dessa värden är
ej angivna i villkor, så använder
man inversionssatsen för $\hat{f}$

som säger att integraler ovan

konvergerar mot $\frac{\hat{f}(\pm 1+0) + \hat{f}(\pm 1-0)}{2}$.

3. Vi gör Laplacetransform i t -led
(alla andra gör fel) För
 $U(x,s) = \mathcal{L}u(x,t)$, får vi problemet

$$s U(x,s) - \sin x = U_{xx}$$

$$U(0,s) = \mathcal{L}(\sin(2t)e^{-t}) = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Löser x -equation. Homogena lösningar:

$$U_h = A e^{\sqrt{s}x} + B e^{-\sqrt{s}x}$$

Väljer $-\sqrt{s}$, om $\sqrt{s}$ betyder gren av s med $\operatorname{Re}\sqrt{s} > 0$, för att garantera att U blir begränsad. Partikulära lösningen blir $U_p(x,s) = \frac{\sin x}{s+1}$

$$\text{så } U(x,s) = B(s) e^{-\sqrt{s}x} = \frac{\sin x}{s+1}$$

$B(s)$ hittas ur randvillk. $x=0$

$$U(0,s) = B(s) = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$U(x,s) = \frac{2}{(s+1)^2+4} e^{-\sqrt{s}x} = \frac{\sin x}{s+1}$$

Inverterar: och använder fältningen

$$U(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau (t-\tau)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau - \sin x e^{-t}$$

6. Söker lösningen beroende av θ .
Förberedelsesteget krävs inte
eftersom z -led har homogena
randvillkor. Separera variabler!

$$\frac{R'' + r^{-1} R'}{R} = - \frac{Z'' + Z}{Z} = \mu^2$$

Löser Z -problemet

$$Z'' + (\mu^2 + 1)Z = 0; Z(0) = Z(1) = 0$$

Egenvärden $\mu_n^2 + 1 = (n\pi)^2, Z(z) = \sin(n\pi z)$

Löser R -eqv.

$$R_n'' + r^{-1} R_n' - (\mu_n^2) R_n = 0$$

Modifierade Bessellexation ordn. 0

Lösningar $R_n = A_n I_0(\mu_n r) + B_n K_0(\mu_n r)$

K_0 ingår inte eftersom lösningen måste
vara begränsad i 0.

$$\text{Så, } U(r, z) = \sum A_n I_0(\mu_n r) \sin(n\pi z)$$

A_n söks ur randvillkor

$$U(1, z) = \sum A_n I_0(\mu_n) \sin(n\pi z) = 1 - z^2$$

multipliserar med $\sin(k\pi z)$ och
integrerar:

$$A_k I_0(\mu_k) \cdot \frac{1}{2} = \int_0^1 (1 - z^2) \sin(k\pi z) dz$$

$$5. \quad U_t = [(1-x^2)u_x]_x$$

I punkter $x = \pm 1$ försvinner
koefficienten $(1-x^2)$. I sådana
punkter, där problemet är singul.,
sätter man randvillkoren: $u(\pm 1, t)$
ändlig.

Separerar variabler

$$\frac{T'}{T} = \frac{((1-x^2)X')'}{X} = -\mu^2$$

X-ekvationen är Legendre

Egenfunktioner $P_n(x)$, egenvärden
 $\mu^2 = n(n+1)$.

Lösningen $u(x, t)$ söks som

$$u(x, t) = \sum T_n(t) P_n(x) ; T_n' + \mu_n^2 T_n = 0$$

$T_n(0)$ söks ut ur begynnelsevillkor

$$T_n(0) = \frac{\int_0^1 x^2 P_n(x) dx}{\|P_n(x)\|^2}$$

nämaren = $\frac{2}{2n+1}$; täljaren beräknas

med hjälp av formeln $P_n = \frac{1}{2n+1} (P_{n+1}' - P_{n-1}')$

och partiellintegrering, som i Folland,
6.2.7, 8.

6. ~~Bestäm~~ separeras θ -beroende. Söker lösningen på formen

$$u(r, \theta, t) = v(r, t) \sin \theta$$

kommer till

$$v_{tt} = v_{rr} + r^{-1} v_r - r^{-2} v$$

$$v(r, 0) = 0, v(r, \pi) = 0, v(1, t) = 1.$$

Förberedelsesteget krävs, söker
 $v(r, t) = r + w(r, t)$ (några försökte
 med $1 + w(r, t)$,
 men det leder
 till hårda beräkningar)
 w satisfierar problemen

$$w_{tt} = w_{rr} + r^{-1} w_r - r^{-2} w$$

$$w(r, 0) = r, w_t(r, 0) = 0, w(1, t) = 0$$

separeras variabler

$$\frac{T''}{T} = \frac{R'' + r^{-1} R' - r^{-2} R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvation är Bessel, ordning 1.
 Egenvärden μ_n , nollställen av $J_1(x)$ /
 egenfunktioner $R_n(r) = J_1(\mu_n r)$.

Lösningen söks som $u(r, t) = \sum T_n(t) R_n(r)$
 för $T_n(t)$ har ekvationen $T_n'' + \mu_n^2 T_n = 0$.

$$T_n = A_n \sin \mu_n t + B_n \cos \mu_n t. \quad A_n, B_n$$

hittar ut, begynnelsevillk. $A_n = 0$,

$$B_n = \frac{\int_0^1 r^2 J_1(\mu_n r) dr}{\|J_1(\mu_n r)\|_2^2}$$