Fourieranalys F2/Kf2
Tenta 20090827 lösningar.

1. F-koefficienter beräknar direkt eller hittar i Beta:

$$f(\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\theta$$

sätter $\theta = 0$. f är kontin. i den punkten.

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}$$

så, $\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

sätter $\theta = \frac{\pi}{2}$, f är kontin. $\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ jämn} \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum \frac{(-1)^m}{(2m-1)}.$$

I punkten $\theta = \pi$ är funktionen icke-kontin.

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

Plancherel: $\int_0^\pi \theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{3} = 2\pi\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}\right]$

Integreringen är alltid möjlig

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0 \\ \frac{\theta^2}{2}, & \theta \geq 0 \end{cases}$$

$$F(\theta) = C_0 + \frac{\pi}{4}\theta - \frac{2}{\pi}\sum \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3} - \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\theta$$

Derivering kräver kontinuitet.
Man kan ta $g(\theta) = \begin{cases} -\theta, & \theta \in [-\pi, 0) \\ 0, & \theta \in (0, \pi] \end{cases}$.

$f+g$ kan man derivera

2. Söker lösningen på formen

$u(r,\theta,z) = v(r,z)\cos 2\theta$. Sätter in i ekvationen och förkortar med $\cos 2\theta$: för v får problemet

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{4}{r^2} v + v_{zz} = 0$$

med randvillkor $v(r,0) = r^2$

$v(r,5) = 0$

Separera variabler, $v(r,z) = R(r)\,Z(z)$

$$\frac{R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \frac{4}{r^2}R}{R} + \frac{Z_{zz}}{Z} = 0$$

$$R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \frac{4}{r^2}R + \mu^2 R = 0 \; ; \quad Z_{zz} - \mu^2 Z = 0$$

R-ekvationen är Bessel av ordningen 2

Lösningen $R_n = J_2(\mu r)$

Väljes randvillkoren på $r=5$, t.ex. $R(5)=0$

då: $R_n(r) = J_2\left(\frac{\lambda_n}{5} r\right)$, λ_n-nollställen av J_2

Söker lösningen $v(r,z)$ på formen

$$v(r,z) = \sum R_n(r)\, Z_n(z)$$

$Z_n(z)$ löser z-ekvationen ovan, $Z_n(z) = A_n \cosh \mu_n z + B_n \sinh \mu_n z$. A_n, B_n hittas ur randvillkoren för $z=0$ och $z=5$

3. Intervall och vikten påpekar på Hermitepolynoms $H_n(x)$

Utvecklar $Q(x) = \sum_{n=0}^{3} c_n H_n$

koefficienterna c_n räknas som

$$c_n = \frac{1}{\|H_n\|_w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} H_n(x) e^{-x^2} dx$$

kan beräknas direkt eller med hjälp av genererande funktionen:

$$e^{2xz - z^2} = \sum H_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

sätter $z = \frac{1}{2}$

$$e^{-\frac{1}{4}} e^{x} = \sum H_n(x) \cdot \frac{1}{2^n n!}$$

Förbuedelsesteget:

tar $v(x,t) = x-\pi-1$, $w = u-v$

för w får problemet

$$w_{tt} + 4w - w_{xx} + w_x = \pi - x$$

$$w_x(0,t) = 0 \; ; \; w(\pi,t) = 0$$

$$w(x,0) = \pi + 1 - x$$

$$w_t(x,0) = 0$$

Separerar variabler, $w(x,t) = X(x)T(t)$

$$X'' + X' + \lambda X = 0$$

Ej S-L formen. Transformerar till

$$e^{x}(e^{-x}X')' + \lambda X = 0$$

$$(e^{-x}X')' + e^{-x}\lambda X = 0$$

Vikt: $\omega(x) = e^{-x}$

Löser X-ekvationen, hittar egenfunkt. och egenvärden.

$$\lambda_n = \left(n\pi + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$X_n(x) = e^{-x/2}\cos\sqrt{\lambda_n}\, x$$

Efter detta, standart. Söker lösningen som $w(x,t) = \sum X_n(x) T_n(t)$

Sätter in i ekvationen, multipl. med X_m och integrerar, kommer till ODE för $T_n(t)$.

5. $\hat{f}(\omega) = \dfrac{\omega}{(1+\omega^2)^2}\,\theta(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2|t|} \operatorname{sgn} t \, dt \overset{\text{parceval}}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathcal{F}[e^{-2|t|} \operatorname{sgn} t]\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot (-2i) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \frac{\omega}{\omega^2+4}\, d\omega$$

- beräknas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \hat{f}(0) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(3t)\,dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{3it} + e^{-3it}]\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \hat{f}(3) + \frac{1}{2} \hat{f}(-3).$$

6. $u_{xx} + u_{yy} - 4u = 0$

Delar variabler: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 4$$

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \; ; \; \frac{Y''}{Y} = 4 + \mu^2$$

Randvillkoren för X är homogena.

Egenfunktioner $X_n(x) = \sin(nx)$,

$\mu_n = n$

Söker lösningen på formen

$u(x,y) = \sum X_n(x)\,Y_n(y)$

för $Y_n(y)$ får ekvation.

$$Y_n'' = (4+n^2)\,Y_n$$

$$Y_n(y) = A_n \cosh\left(\sqrt{4+n^2}\,y\right) + B_n \sinh\left(\sqrt{4+n^2}\,y\right)$$

A_n, B_n hittas ur randvillk. för $y=0$ och $y = 2\pi$.