

MVE030 Fourier Analysis's
F2, Kf 2

Tenta 2010-01-16. Lösning förslag

1. Löser i polära koordinater.

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - u$$

Separerar variabler

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' + \frac{1}{r} R' - R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvationen lösas med Bessel:

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) ; \mu_n \text{-nollställen av } J_0$$

$$u(r,t) = \sum J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) C_n e^{-\mu_n^2 t}$$

C_n hittar ur beg. villk.

$$C_n = \frac{1}{\|J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right)\|^2} \int_0^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) f(r) r dr$$

Integral räknas med rekurr. formler

2. Man tar funktioner $f_0=1$, $f_1=x$, $f_2=x^2$
och ortogonaliserar med Gram-Schmidt
metoden. Vi får $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ -
polynom av grad 0, 1, 2.
Efter detta blir sökta polynomen

$$P = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

$$c_k = \frac{\langle x^3, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$$

alla skalärprodukter räknas
i Hilbertrummet $L_2(1,3)$
med vikten x^{-1} .

3. Söker lösningar som F -serie
i x -variabel med koefficienterna
beroende på y . x -variabeln
väljs eftersom i x -variabel är
randvillkor homogena.

$$u(x, y) = \sum a_n(y) \sin nx$$

Sätter in i ekvationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n(y) + a_n''(y) - 8 a_n(y)) \sin(nx) = 1$$

multipliserar med $\sin kx$ och
integrerar

$$(*) \quad -k^2 a_k(y) + a_k''(y) - 8 a_k(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k}$$

Ekvationen (*) lösas med randvillkor

$$a_k(0) = 0; \quad a_k(2\pi) = \begin{cases} 1, & k=1 \\ -2, & k=2 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

Får uttryck genom hyperb. funktioner

4. Vi har

$$\underbrace{f * \dots * f}_k = \hat{f} \cdot \hat{f} \cdot \dots \cdot \hat{f}$$

därför för vår funktion

$$\underbrace{f * \dots * f}_k = f, = \hat{f}^{-1} \hat{f}$$

k-udda ;

$$\underbrace{f * \dots * f}_k = \hat{f}^{-1} \hat{f}$$

k-jämn

därför

$$\underbrace{f * \dots * f}_{\text{udda}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

$$\underbrace{f * \dots * f}_{\text{jämn}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| e^{ix\xi} d\xi$$

Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \cdot \hat{g}|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_1^5 d\xi$$

5. I Beta litaras F-serie

$$\theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n\theta$$

$$\theta \in [-\pi, \pi]$$

Den första integreringen ger

$$F(\theta) = \frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{3} \theta = C_0 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(n\theta)$$

$$\text{med } C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) d\theta = 0.$$

Den andra integreringen ger

$$\frac{\theta^4}{12} - \frac{\pi^2}{6} \theta^2 = C_0 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos n\theta$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\theta^4}{12} - \frac{\pi^2}{6} \theta^2 \right) d\theta = -\frac{7\pi^4}{180}$$

$$\theta \in [-\pi, \pi]$$

Samman av serien är densamma
i punkter $0, 2\pi, 4\pi$ osv, $= 0$
eftersom serien ger en peri-
odisk funktion.

Den första serien kan deriveras
1 gång. Vidare - går inte eftersom
den första derivatan av funktionen
inte är kontinuerlig.

6. I sfäriska koordinater

$$u(r, \theta, \varphi) = u(r, \varphi)$$

eftersom randdata inte beror på θ .

Efter standarda variabelbytet

$s = \cos \varphi$, kommer man till

$$u_{rr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial s} \left((1-s^2) \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0$$

variabelseparation ger

$$u(r, s) = \sum a_n r^n P_n(s)$$

där P_n - Legendrepolynom.

Koefficienterna a_n beräknas som

$$a_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^1 f(s) P_n(s) ds$$

$$f(s) = \begin{cases} s, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

Sådana integral beräknades i kursen m.h.av rekurrenta formler.