

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa samt BETA eller Standard Math.
Tables

Maxpoäng på uppgifterna:

- 1: 8
- 2: 8
- 3: 9
- 4: 8
- 5: 8
- 6: 9
- 7: 4
- 8: 6

1. Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen $u_t = ku_{xx}$ i kvadranten $x, t > 0$ med randvillkoren $u(x, 0) = 0$ och $u(0, t) = 1/\sqrt{t}$.
2. (a) Visa att funktionerna $(\phi_n)_1^\infty$ bildar ett ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$ om och endast om detsamma gäller för Fouriertransformerna $(\widehat{\phi_n})_1^\infty$.
(b) Visa att ett ortogonalsystem $(\phi_n)_1^\infty$ i $L^2(\mathbb{R})$ är fullständigt om och endast om $(\widehat{\phi_n})_1^\infty$ är fullständigt.
(c) Ge exempel på ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$. (Man behöver inte bevisa fullständigheten.) Ledning: En möjlighet är att börja med att dela in linjen i intervall.

Deluppgifterna a, b och c är värda 2, 2 resp. 4 poäng.

3. Lös Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i kvadraten $0 < x, y < L$ med randvärdena

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, L) = 0, \quad u(0, y) = 1 + y, \quad u(L, y) = 0.$$

4. Betrakta Sturm-Liouville-problemet $f'' + \lambda f$ i intervallet $[0, 4]$ med randvärdena $f'(0) = 0$ och $2f(4) - f'(4) = 0$. Låt $(\lambda_k)_1^\infty$ vara egenvärdena uppräknade i växande ordning. Ange ett approximativt värde på λ_3 genom att bestämma ett heltal n sådant att $|\lambda_3 - n| < 1$.

5. Finn en begränsad lösning till Laplaces ekvation i polär form

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$$

i sektorn $0 < r < R$, $0 < \theta < \beta$, med randvillkoren $u(r, 0) = 0$, $u(r, \beta) = 0$ och $u(R, \theta) = \theta^3$. Här är $0 < \beta < \pi$.

6. Lös värmeledningsekvationen $u_t = k\Delta u$ i cirkelskivan $r < \rho$ med randvillkoret $u(\rho, \theta, t) = 0$ för alla θ och t och med begynnelsevillkoret $u(r, \theta, 0) = h(r)(1 + \cos \theta)$. Här är r, θ polära koordinater, $k > 0$ en konstant och $h(r)$ en given funktion.

7. Formulera samplingssatsen.

8. Berätta om ortogonalpolynom i ett viktat rum $L_w^2(a, b)$: definition, konstruktion, entydighet.