

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2

1.

Fourierserien för funktionen $\cos \alpha x$ i $[-\pi, \pi]$ fås ur BETA 13.1 (15):

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2 - \alpha^2}.$$

Denna funktion, fortsatt till en 2π -periodisk funktion på hela linjen, är kontinuerlig och styckvis glatt. (Kontinuiteten i π följer av att funktionen är jämn.) Därför konvergerar Fourierserien i alla punkter, mot funktionens värde. I punkten $x = 0$ får vi

$$1 = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

Det följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha \sin \alpha \pi} - \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Med $x = \pi$ får man på liknande sätt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cot \alpha \pi}{2\alpha}.$$

För den tredje serien kan man använda Parsevals formel, som i BETA 13.1, översta formeln i rutan med Parsevals identiteter, med $T = 2\pi$. Man får

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha x \, dx \\ = \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Integralen här räknas ut via $\cos^2 \alpha x = (1 + \cos 2\alpha x)/2$ och blir $\pi + (2\alpha)^{-1} \sin 2\alpha \pi$. Detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2 \sin^2 \alpha \pi} + \frac{\pi \sin 2\alpha \pi}{8\alpha^3 \sin^2 \alpha \pi},$$

där sista termen kan förenklas till $\pi \cot \alpha \pi / 4\alpha^3$.

Ett annat, elegant sätt att bestämma den tredje summan är att utgå från formeln för den andra summan som vi härledde, och derivera båda leden med avseende på parametern α .

2.

Eftersom den inhomogena termen $\cos x$ i differentialekvationen inte beror av t , kan man använda steady state-metoden. Det innebär att först finna en t -oberoende lösning $u_0(x)$ till differentialekvationen som dessutom har rätt randvärden i ändpunkterna 0 och π . Man får $u_0''(x) = -k^{-1} \cos x$ så att $u_0(x) = k^{-1} \cos x + ax + b$, och randvärdena ger $u_0(x) = k^{-1} \cos x - k^{-1} + 2x/(\pi k)$.

Nu sätter vi $u(x, t) = u_0(x) + v(x, t)$ och söker v , som måste vara en lösning till problemet

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, \\ v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0, \\ v(x, 0) = (1 - k^{-1}) \cos x + k^{-1} - 2x/(\pi k). \end{cases}$$

Detta är ett standardproblem, som löses med utveckling i sinusserier. För att utveckla de tre termerna i initialvärdet $v(x, 0)$ ovan, kan man använda formlerna (11), (25) (som är enklare än (2)), och (12) i BETA 13.1. Man får

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= (1 - k^{-1}) \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx \\ &+ \frac{4}{k\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{4}{k\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

Här ser man att de udda termerna i den tredje summan sammanfaller med termerna i den andra summan, så att

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= (1 - k^{-1}) \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx + \frac{4}{k\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{8kn^2 - 2}{kn(4n^2 - 1)} \sin 2nx. \end{aligned}$$

Därför ges v av

$$v(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{8kn^2 - 2}{kn(4n^2 - 1)} e^{-4kn^2 t} \sin 2nx.$$

Den sökta funktionen u blir alltså

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x) = v(x, t) + k^{-1}(\cos x - 1) + 2x/(\pi k)$$

med ovanstående v .

3.

Med $f(x) = 1/(1 + x^2)$ har man enligt tabell $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$, och $LP_{\alpha}(1/(1+x^2))$ har alltså Fouriertransformen $\pi e^{-|\xi|} \chi_{(-\alpha, \alpha)}(\xi)$. Enligt Fouriers inversionsformel är $LP_{\alpha}(1/(1+x^2))$ då

$$\frac{1}{2\pi} \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-|\xi|} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\xi+ix\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\xi-ix\xi} d\xi,$$

där vi bytte variabel $\xi \mapsto -\xi$ i integralen mellan $-\alpha$ och 0 . Men detta är detsamma som

$$\begin{aligned}\Re \int_0^\alpha e^{-\xi+ix\xi} d\xi &= \Re \frac{e^{-\alpha+iax} - 1}{-1+ix} \\ &= \Re \frac{(e^{-\alpha}(\cos \alpha x + i \sin \alpha x) - 1)(-1-ix)}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha} \cos \alpha x + x e^{-\alpha} \sin \alpha x}{1+x^2},\end{aligned}$$

som är svaret. Imaginärdelen blir alltså 0 .

4.

För detta Dirichletproblem i ett ringformat område vet man att variabelseparation leder till en lösning med serieutveckling av typ

$$(1) \quad u(r, \theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\theta} (a_n r^n + b_n r^{-n}).$$

(Se annars härledningen i Folland 4.4, formel (4.33).) De givna randvärdena leder till

$$\frac{b_0}{R_0} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\theta} n (a_n R_0^{n-1} - b_n R_0^{-n-1}) = 1$$

och

$$a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\theta} (a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) = |\theta|,$$

ekvationer som ska gälla för alla $\theta \in [-\pi, \pi]$. Därför utvecklar vi högerleden i Fourierserier och identifierar koefficienterna i varje ekvation. Konstanten 1 är sin egen Fouriersserie, så man får $b_0/R_0 = 1$ och $a_n R_0^{n-1} - b_n R_0^{-n-1} = 0$ för alla $n \neq 0$. Fourierserien för $|\theta|$ är enligt BETA 13.1 (3) med $\alpha = 1$ och $L = h = \pi$

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\theta.$$

Detta skriver vi om som

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} e^{in\theta}.$$

Därför blir $a_0 + b_0 \ln R_1 = \pi/2$ och $a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = 0$ för jämna $n \neq 0$, medan $a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = -2/(\pi n^2)$ för udda n . För varje n har vi nu två ekvationer för a_n och b_n , och man får lätt att $a_0 = \pi/2 - R_0 \ln R_1$ och $b_0 = R_0$. För jämna $n \neq 0$ blir $a_n = b_n = 0$, medan för udda n

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2} \frac{R_1^n}{R_0^{2n} + R_1^{2n}}$$

och

$$b_n = -\frac{2}{\pi n^2} \frac{R_1^{-n}}{R_0^{-2n} + R_1^{-2n}}.$$

Dessa värden ska stoppas in i uttrycket (1), men först observerar vi att $b_n = a_{-n}$ för dessa n . Den del av summan i (1) som innehåller b_n kan därför skrivas, efter ett teckenbyte $n \mapsto -n$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ udda}} e^{-in\theta} a_n r^n.$$

Svaret blir därför

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} - R_0 \ln R_1 + R_0 \ln r - \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ udda}} \frac{R_1^n r^n}{n^2 (R_0^{2n} + R_1^{2n})} \cos n\theta.$$

5.

Transformationen $x = t/3$ tar oss till intervallet $-1 \leq t \leq 1$, där vi vet att ortogonalpolynomen, med vikt 1, är Legendrepolynomen $P_n(t)$. Med $P(x) = Q(t)$ ska vi minimera

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left| \sin \frac{t}{3} - Q(t) \right|^2 dt,$$

där faktorn $1/3$ är betydelselös. Enligt satsen om bästa approximation blir det minimerande polynomet

$$Q(t) = \sum_0^2 c_n P_n(t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^1 \sin \frac{t}{3} P_n(t) dt.$$

Här tas normen i rummet $L^2[-1, 1]$. Polynomet Q är en ortogonalprojektion. För jämna n är $P_n(t)$ en jämn funktion, så integralen blir 0. Då återstår bara fallet $n = 1$, med $P_1(t) = t$ (tabell) och $\|P_1\|^2 = 2/3$. Efter en partialintegration får man

$$c_1 = \frac{3}{2} \left(-6 \cos \frac{1}{3} + 18 \sin \frac{1}{3} \right) = 27 \sin \frac{1}{3} - 9 \cos \frac{1}{3}.$$

Då ger $Q(t) = c_1 t$ att

$$P(x) = Q(t) = 3c_1 x = \left(81 \sin \frac{1}{3} - 27 \cos \frac{1}{3} \right) x.$$

För att teckenstudera $\sin x - P(x)$ observerar vi att $\sin x$ är konkav i $[0, 1/3]$. Genom att rita en enkel figur ser man därför att påståendet i b) följer om linjen $y = P(x)$ skär kurvan $y = \sin x$ i någon punkt i det öppna intervallet $(0, 1/3)$, eftersom båda går genom origo. Att de skär varandra kan man verifiera numeriskt. Men det är nog enklare att utesluta motsatsen med följande argument: Om de inte skär varandra, skulle skillnaden $\sin x - P(x)$ ha konstant tecken i $(0, 1/3)$. Eftersom P liksom Q är en ortogonalprojektion, är $\sin x - P(x)$ ortogonal mot $P_1(t) = 3x$ i intervallet $(-1/3, 1/3)$, så att

$$\int_{-1/3}^{1/3} (\sin x - P(x))x dx = 0.$$

Här är integranden jämn, så man har också

$$\int_0^{1/3} (\sin x - P(x))x dx = 0.$$

Av denna likhet följer att $\sin x - P(x)$ inte kan ha konstant tecken i $(0, 1/3)$, och saken är klar.

6.

Vågekvationen blir i polära koordinater

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right).$$

Variabelseparation $u(r, \theta, t) = T(t)R(r)\Theta(\theta)$ ger

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(t) + r^{-1}R'(t)}{R(t)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m,$$

för någon konstant m . För T får vi den enkla ekvationen

$$T''(t) = c^2 m T(t) = 0.$$

Det första av de givna initialvillkoren medför att $T(0) = 0$. Om $m > 0$ blir då $T(t)$ en multipel av $\sinh c\sqrt{m}t$. Det skulle innebära att membranets svängningar växer obegränsat med tiden, och så kan ett membran inte bete sig. Fallet $m = 0$ ger en multipel av t , något som också är fysikaliskt orimligt. Alltså är $m < 0$. Vi skriver då $m = -\mu^2$ med $\mu > 0$, och $T(t)$ blir en multipel av $\sin c\mu t$. (Den som på denna punkt föredrar ett mer matematiskt än fysikaliskt resonemang kan läsa parenteserna nedan.)

Den andra likheten i den dubbla ekvationen ovan medför

$$\frac{r^2 R''(t) + r R'(t) + \mu^2 r^2 R(t)}{R(t)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \nu^2,$$

med en ny konstant ν . För Θ får vi

$$\Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0,$$

och eftersom Θ är 2π -periodisk ser vi först att ν^2 måste vara positivt eller 0, så att talet ν är reellt. Sen får vi också att ν måste vara ett heltal, som kan antas ickenegativt. Vi skriver då $\nu = n \in \{0, 1, \dots\}$, och ser att $\Theta(\theta)$ är en linjärkombination av $\cos n\theta$ och $\sin n\theta$.

Ekvationen för R blir

$$r^2 R''(t) + r R'(t) + (\mu^2 r^2 - n^2) R(t) = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation, med lösningar som är linjärkombinationer av $J_n(\mu r)$ och $Y_n(\mu r)$. Randvillkoret

$u(r_0, \theta, t) = 0$ medför att $R(r_0) = 0$ och att $R(r)$ är begränsad även vid $r = 0$. Därför kan vi utesluta $Y_n(\mu r)$ och få att $R(r)$ måste vara en multipel av $J_n(\mu r)$, med ett sådant μ att μr_0 är ett nollställe till J_n .

(Här utgick vi från att $m = -\mu^2 < 0$, så att μ är reellt och kan väljas positivt. Men $m > 0$ skulle innebära μ är rent imaginärt och att $R(r)$ blir en linjärkombination av I_n och K_n . Då kan vi först utesluta K_n som är singulär i 0 och sen I_n som inte har något nollställe på $\mathbb{R}_+$. Och fallet $m = 0$ ger en Eulerekvation med lösningar som är linjärkombinationer av r^n och r^{-n} , resp. av 1 och $\ln r$ för $n = 0$. Då utesluts r^{-n} och $\ln r$ av begränsningsvillkoret vid 0, och randvärdet 0 i r_0 gör sedan även detta fall omöjligt.)

Om λ_{kn} , $k = 1, 2, \dots$, betecknar de positiva nollställena till J_n , har vi alltså $\mu = \lambda_{kn}/r_0$ för något k . Det ovanstående innebär därför att de separerade lösningarna är av formen

$$\sin \frac{c\lambda_{kn}t}{r_0} J_n \left(\frac{\lambda_{kn}r}{r_0} \right) (a \cos n\theta + b \sin n\theta).$$

Lösningen till det givna problemet är en summa

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{c\lambda_{kn}t}{r_0} J_n \left(\frac{\lambda_{kn}r}{r_0} \right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta). \end{aligned}$$

För att bestämma koefficienterna a_{kn} och b_{kn} använder vi det andra initialvillkoret. Genom att derivera med avseende på t och sen sätta $t = 0$ får man

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{c}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} J_n \left(\frac{\lambda_{kn}r}{r_0} \right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) \\ = (r_0 - r)(\pi - |\theta|). \end{aligned}$$

Nu vet man att funktionerna $r \mapsto J_n(\lambda_{kn}r/r_0)$, $k = 1, 2, \dots$, bildar ett fullständigt ortogonalsystem på intervallet $(0, r_0)$ med vikten $w(r) = r$, se BETA 12.4 "Orthogonal series ...". Eftersom högerledet i (2) är jämnt i θ , kommer b_{kn} att bli 0. Koefficienterna a_{kn} kan man få genom att kombinera formeln

för koefficienterna i utvecklingar i dessa Besselfunktioner med den vanliga koefficientformeln för cosinusserier. Det är dock aningen enklare att utnyttja att högerledet är en produkt av en funktion av r och en av θ , och utveckla den senare med hjälp av tabell. Man får, t ex enligt BETA 13.1 (6) med $h = L = \pi$,

$$\pi - |\theta| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\theta}{(2m-1)^2}.$$

Det betyder att vi kan se (2) som en likhet mellan två cosinusserier och identifiera koefficienterna, vilket ger

$$\frac{c}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k0} J_0 \left(\frac{\lambda_{k0} r}{r_0} \right) a_{k0} = (r_0 - r) \frac{\pi}{2}$$

för $n = 0$. För jämna $n \neq 0$ blir $a_{kn} = 0$ och för udda n får man

$$\frac{c}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0} \right) a_{kn} = (r_0 - r) \frac{4}{\pi n^2}.$$

Nu kan vi använda formeln för Besselkoefficienter (BETA 12.4 igen) och få

$$a_{k0} = \frac{\pi}{cr_0 \lambda_{k0} J_1(\lambda_{k0})^2} \int_0^{r_0} (r_0 - r) J_0 \left(\frac{\lambda_{k0} r}{r_0} \right) r dr,$$

och

$$a_{kn} = \frac{8}{\pi cr_0 n^2 \lambda_{kn} J_{n+1}(\lambda_{kn})^2} \int_0^{r_0} (r_0 - r) J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0} \right) r dr$$

för udda n .

Svaret blir därför

$$u(r, \theta, t) = \sum_n \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{c \lambda_{kn} t}{r_0} J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0} \right) a_{kn} \cos n\theta,$$

där summan i n löper över 0 och de udda naturliga talen, och a_{kn} har de angivna värdena.