

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa samt BETA eller Standard Math.
Tables

(maxpoäng inom parentes, med summa 61)

1. Den 2π -periodiska funktionen f definieras av $f(t) = t^2$ då $0 \leq t \leq \pi$ och $f(t) = 0$ då $-\pi < t < 0$. Utveckla f i Fourierserie. I vilka punkter konvergerar serien, och mot vilka värden? (8)

2. Finn en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x, t > 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = \frac{1}{1+t}, & t > 0, \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant. (8)

3. Bestäm tal a och b så att värdet av

$$\int_0^1 |e^x + a(1+x) + b(1-x)|^2 dx$$

blir så litet som möjligt. (8)

4. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin \pi x, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = -1, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(8)

5. För ett tidsinvariant, linjärt system ger insignalen $\operatorname{sgn} t e^{-|t|}$ upphov till utsignalen $|t|e^{-|t|}$. Om insignalen är 2π -periodisk med värden $\pi - t$ för $0 < t < 2\pi$, vad är utsignalen? Svaret får ges i form av en Fourierserie. Med $\operatorname{sgn} t$ menar man $+1$ då $t > 0$ och -1 då $t < 0$. (8)
6. Anta att en funktion $u = u(x, y, t)$ uppfyller värmeledningsekvationen $u_t = k\Delta u$ i halvcirkelskivan $x^2 + y^2 < r_0^2$, $y > 0$, med randvärden $u(x, 0, t) = 0$ för $-r_0 < x < r_0$ samt $u_r = 0$ på den krökta delen av randen. Här betecknar u_r derivatan i den radiella riktningen, och $k > 0$ är en konstant. Om initialvärdena ges av att $u(x, y, 0) = x$, vad blir u ? Svaret får innehålla svårberäknade integraler. (9)
7. Formulera och bevisa Fouriers inversionsformel, då f och $\hat{f}$ båda tillhör $L^1(\mathbb{R})$. (6)
8. Betrakta den inhomogena vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x, t)$ i ett område $a < x < b$, $t > 0$. Om de givna randvillkoren för $x = a, b$ och initialvillkoren för $t = 0$ också är inhomogena, beskriv metoder för att angripa och lösa problemet. Diskutera speciellt fallet då alla inhomogeniteter är oberoende av variabeln t . (6)