

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).

Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 60.

1. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|} d\xi,$$

där funktionen f definieras av att $f(x) = \frac{1}{x^2}$ för $x > 2$ och $f(x) = 0$ för $x \leq 2$. (8)

2. Lös följande problem, där $u = u(x, t)$ och $k, \ell > 0$ är konstanter:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell, \ t > 0 \\ u(0, t) = 0, \ u_x(\ell, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x, & 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (8)$$

3. Bestäm det polynom P av grad högst 3 som minimerar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{|x|} - P(x) \right|^2 e^{-2x^2} dx. \quad (8)$$

4. Hitta en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \ u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 1, \ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8)$$

5. Bestäm för $x > 0$ integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \varphi} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

exempelvis med hjälp av Besselfunktionernas genererande funktion. (8)

6. Lös följande randvärdesproblem i rektangeln $[0, L] \times [0, \ell]$:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 1, & 0 < x < L, \ 0 < y < \ell, \\ u(x, 0) = 1, \ u(x, \ell) = x, & 0 < x < L, \\ u_x(0, y) = 0, \ u_x(L, y) = 0, & 0 < y < \ell. \end{cases} \quad (8)$$

7. Definiera ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. (6)

8. (a) Vad innebär det att ett linjärt dynamiskt system är tidsinvariant?

(b) Ange ett samband mellan sådan tidsinvarians och faltning.

(c) Vad betyder det att systemet är kausalt, och hur hänger det ihop med faltning? (2+2+2)