

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.

Det finns två inhomogeniteter i problemet, termen x i ekvationen och randvärdet 1 för $x = \ell$. Eftersom båda är oberoende av t , kan steady state-metoden användas. Den innebär att man bestämmer en funktion $u_0(x)$ av enbart x som skall uppfylla både ekvationen och de givna randvillkoren för $x = 0$ och $x = \ell$. Det betyder

$$-ku_0''(x) = x \quad \text{och} \quad u_0(0) = 0 \quad \text{och} \quad u_0(\ell) = 1.$$

Två integrationer ger att $u_0(x) = -x^3/6k + ax + b$, och randvillkoren medför $b = 0$ och $a = \ell^{-1} + \ell^2/6k$. Alltså är

$$u_0(x) = \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k} \right) x - \frac{1}{6k} x^3.$$

Vi söker nu en lösning till problemet av formen $u(x, t) = v(x, t) + u_0(x)$. Instoppat i ekvationen ger det

$$v_t(x, t) + 0 - kv_{xx}(x, t) - ku_0''(x) = x,$$

och för v får vi därför den homogena värmeledningsekvationen $v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = 0$. Randvillkoren för v blir också homogena, $v(0, t) = 0$ och $v(\ell, t) = 0$. Initialvillkoret blir $v(x, 0) = -u_0(x)$. För v har vi nu ett standardproblem för variabelseparation, och vi vet att de separabla lösningarna till ekvationen med randvillkoren är

$$\sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ansatsen blir därför

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t},$$

och initialvillkoret medför att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \frac{1}{6k} x^3 - \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k} \right) x, \quad 0 < x < \ell.$$

Vi behöver alltså utveckla funktionerna x^3 och x i sinusserie i intervallet, och det gör vi med hjälp av BETA 13.1 (14) och (12), med $L = \ell$. Detta ger efter lite förenklingar

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{\ell^3}{\pi^2 k n^3} \right).$$

Resultatet av det hela blir

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k} \right) x - \frac{1}{6k} x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-k \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 t}$$

med dessa b_n .

Anm. 1 De givna randvärdena har en diskontinuitet i hörnet $(1, 0)$. I den punkten kan man därför inte vänta sig att lösningen skall ha något gränsvärde.

Anm. 2 Att i stället angripa problemet genom att Laplacetransformera i t -variabeln är inte att rekommendera, eftersom det leder till en besvärlig invers Laplacetransform.

Uppgift 2.

(a) Om h är systemets impulssvar, är svaret på insignalen $e^{i\omega t}$ alltid $\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$. I vårt fall ger detta $\hat{h}(\omega) = i\omega e^{-\omega^2}$. För att finna den inversa Fouriertransformen av detta uttryck observerar vi att $e^{-\omega^2}$ är Fouriertransformen av $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$. Därför är

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} e^{-t^2/4} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} t e^{-t^2/4},$$

som alltså är svaret på fråga (a).

Anm. Ofta räknar man ut systemfunktionen $\hat{h}$ som kvoten mellan *Fouriertransformerna* av en utsignal och motsvarande insignal. Men här går detta inte bra, eftersom Fouriertransformen av insignalen $e^{i\omega t}$ måste tas i distributionsmening och blir en punktmassa.

(b) Impulssvaret är inte 0 på vänstra halvaxeln, så systemet är inte kausalt.

(c) Insignalen $\chi_{(-3,3)}$ ger utsignalen

$$\begin{aligned} h * \chi_{(-3,3)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) \chi_{(-3,3)}(t-s) ds \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t-3}^{t+3} s e^{-s^2/4} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (e^{-(t+3)^2/4} - e^{-(t-3)^2/4}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-9/4} e^{-t^2/4} \sinh \frac{3t}{2}. \end{aligned}$$

Uppgift 3.

Här kan man lämpligen Laplacetransformera i t -variabeln, i synnerhet som initialvillkoren är homogena. Då kommer $U(x, z) = \mathcal{L}u(x, z)$ att uppfylla ekvationen $z^2 U(x, z) - zu(x, 0) - u_t(x, 0) = c^2 U_{xx}(x, z)$, och alltså

$$z^2 U(x, z) = c^2 U_{xx}(x, z).$$

För fixt z får vi

$$U(x, z) = A(z) \exp\left(\frac{zx}{c}\right) + B(z) \exp\left(-\frac{zx}{c}\right),$$

där A och B beror av z men inte av x . Den första termen här har ett alltför snabbt växande då x växer och förkastas. Randvillkoret ger att $U(0, z) = \mathcal{L}t^3 = 6z^{-4}$, det sista enligt BETA 13.5 L20. Vi får alltså för $x = 0$ att $B(z) = 6z^{-4}$ och därmed

$$U(x, z) = 6z^{-4} \exp\left(-\frac{zx}{c}\right).$$

För att hitta u , som är inversa Laplacetransformen till detta uttryck, fixerar vi x och observerar att $6z^{-4}$ är Laplacetransformen av funktionen t^3 . Effekten av faktorn $\exp(-zx/c)$

är att denna funktion translateras, enligt regeln i BETA 13.5 L4. Den inversa Laplacetransformen av $U(x, z)$ är därför $(t - x/c)^3$, men här är det viktigt att funktionen t^3 skall tolkas som 0 för negativa argument. Svaret blir alltså

$$u(x, t) = \begin{cases} (t - x/c)^3, & \text{om } t > x/c \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta kan också skrivas som $u(x, t) = (t - x/c)^3 \theta(t - x/c)$ med Heavisidefunktionen θ . Se gärna efter i ett diagram var de olika uttrycken för $u(x, t)$ gäller. Lägg märke till att vi egentligen inte behövde Laplacetransformen $6z^{-4}$, det hade räckt att skriva $\mathcal{L}t^3$.

Uppgift 4.

Koefficienten x^2 framför f' är positiv i intervallet, och vikten är 1. De givna randvillkoren är separerade och därmed självadjungerade, så vi har ett reguljärt Sturm-Liouvilleproblem. Ekvationen kan skrivas

$$x^2 f'' + 2x f' - f + \lambda f = 0,$$

och är alltså en Eulerekvation. För att finna den allmänna lösningen ansätter vi $f(x) = x^\gamma$. Det leder till ekvationen $\gamma(\gamma - 1) + 2\gamma - 1 + \lambda = 0$, med lösningar

$$\gamma = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \lambda}.$$

Vi delar in i fall enligt tecknet på det som här står under rottecknet.

Om $5/4 - \lambda > 0$, skriver vi $5/4 - \lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$ så att $\gamma = -1/2 \pm \mu$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen blir då

$$f(x) = a \frac{1}{\sqrt{x}} x^\mu + b \frac{1}{\sqrt{x}} x^{-\mu}.$$

Randvillkoret i punkten 1 ger att $a + b = 0$, så att lösningen är proportionell mot $\frac{1}{\sqrt{x}}(x^\mu - x^{-\mu}) = \frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\mu \ln x} - e^{-\mu \ln x})$ och

alltså mot $\frac{1}{\sqrt{x}} \sinh(\mu \ln x)$. Detta deriveras, och man ser att randvillkoret i punkten 2 ger att

$$-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \sinh(\mu \ln x) + \frac{\mu}{x\sqrt{x}} \cosh(\mu \ln x) = 0$$

skall gälla för $x = 2$. Härav fås

$$\tanh(\mu \ln 2) = 2\mu.$$

En skiss av graferna för de båda leden i denna ekvation, som funktioner av μ , visar att kurvorna skär varandra i origo. Men för $\mu > 0$ har de ingen skärningspunkt, eftersom derivatan av vänsterledet är $\ln 2 / \cosh^2(\mu \ln 2)$ som är avtagande i $\mu > 0$ och i 0 tar värdet $\ln 2$, vilket ligger under det konstanta värdet 2 av högerledets derivata. Ekvationen har alltså inga positiva lösningar, och därför finns inga egenvärden med $5/4 - \lambda > 0$.

Om $\lambda = 5/4$, har andragradsekvationen för γ dubbelrot $-1/2$. Därför är den allmänna lösningen till differential-ekvationen

$$f(x) = a \frac{1}{\sqrt{x}} + b \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x.$$

Randvillkoren medför $a = 0$ och $-\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$, dvs. $\ln 2 = 2$ som är falskt. Alltså är $5/4$ inget egenvärde.

Om $5/4 - \lambda < 0$, sätter vi $5/4 - \lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$. Den allmänna lösningen kan nu skrivas

$$f(x) = a \frac{1}{\sqrt{x}} x^{i\mu} + b \frac{1}{\sqrt{x}} x^{-i\mu},$$

Randvillkoret i punkten 1 medför som nyss att $a + b = 0$, så att lösningen är proportionell mot $\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{i\mu \ln x} - e^{-i\mu \ln x})$ och alltså mot $\frac{1}{\sqrt{x}} \sinh(\mu \ln x)$. Det andra randvillkoret ger

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(\mu \ln 2) + \frac{\mu}{2\sqrt{2}} \cos(\mu \ln 2) = 0,$$

vilket betyder

$$\tan(\mu \ln 2) = 2\mu.$$

Som i första fallet skissar man graferna av de båda leden i denna ekvation. Det framgår att ekvationen har en växande följd av positiva lösningar μ_k , $k = 1, 2, \dots$, och vi får alltså en följd av egenvärden $\lambda_k = 5/4 + \mu_k^2$. De sökta egenfunktionerna är då

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\mu_k \ln x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

med dessa μ_k .

Uppgift 5.

Det enklaste är nog att försöka se serien som Fourierserien för någon funktion, med hjälp av tabell. I BETA 13.1 (22) ser vi att funktionen

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi t}{2} + \frac{t^2}{4}$$

har Fourierserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$$

i intervallet $0 < t < 2\pi$. Den givna summan kan skrivas som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2bn}{n^2} = \frac{1}{2}(f(0) - f(2b)),$$

det sista förutsatt att Fourierserien för f konvergerar mot f i punkterna 0 och $2b$.

För att verifiera denna konvergens tänker vi oss en fortsättning av f till en 2π -periodisk funktion på hela linjen. Eftersom f är deriverbar i $[0, 2\pi]$ och tar värdet $\pi^2/6$ både i 0 och i 2π , blir denna fortsättning styckvis glatt och kontinuerlig. Därför konvergerar Fourierserien mot f i alla punkter. Den sökta summan är alltså

$$\frac{1}{2}(f(0) - f(2b)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \pi b - b^2 \right) = \frac{(\pi - b)b}{2}.$$

En alternativ metod går ut på att tillämpa Parsevals ekvation på en funktion vars Fourierkoefficienter är (proportionella mot) $\pm \sin bn/n$. BETA 13.1 (1) med $L = \pi$ och $h = 1$ ger att den 2π -periodiska funktion $g(t)$ som tar värdet 1 för $|t| < \alpha\pi$ och är 0 i resten av intervallet $[-\pi, \pi]$ har Fourierserien

$$\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n} \cos nt.$$

Här är $0 < \alpha < 1$, och vi väljer $\alpha = b/\pi$. Parsevals ekvation ger nu

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt = 2\pi\alpha^2 + \pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^2} = \frac{2b^2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2}.$$

Eftersom vänsterledet här är $2b$, får man även på detta sätt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2} = \frac{(\pi - b)b}{2}.$$

Anm. Det fungerar *inte* att använda Parsevals ekvation på Fourierserier som

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}.$$

Här är ju koefficienterna $1/n$, så man får inte den sökta serien.

Uppgift 6.

Vi använder cylindriska koordinater (r, θ, z) och observerar att randvillkoret för $z = \ell$ då skrivs $u(r, \theta, \ell) = r \cos \theta + r \sin \theta$. Först söker vi de separerade lösningarna

$$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

till differentialekvationen med randvillkoret för $r = R_0$, som ger $R(R_0) = 0$. Eftersom Δu uttryckt i dessa koordinater blir $u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$, får man

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

Genom att här flytta över sista termen till högerledet får vi en ekvation vars båda led måste vara en konstant, säg λ . Alltså är $-Z''/Z = \lambda$ och, efter multiplikation med r^2 ,

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda r^2.$$

Här kan vi på samma sätt flytta över termen med Θ till högerledet, och dessutom λr^2 till vänsterledet. Då ser vi att de två kvantiteterna

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \lambda r^2 \quad \text{och} \quad -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

måste ha samma konstanta värde. Eftersom Θ är 2π -periodisk, är detta värde av formen n^2 med $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, och $\Theta(\theta) = a \cos n\theta + b \sin n\theta$. För R får vi då ekvationen

$$r^2 R'' + r R' - (\lambda r^2 + n^2) R = 0.$$

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$, har vi den modifierade Besselekvationen, med lösningar

$$R(r) = c I_n(\mu r) + c' K_n(\mu r).$$

Men K_n är singulär i 0 och förkastas, och I_n är positiv och kan inte uppfylla randvillkoret $R(R_0) = 0$. Vi kan avfärda fallet $\lambda > 0$.

Om $\lambda = 0$, har vi en Eulerekvation, och ansatsen $R(r) = r^\gamma$ ger $\gamma = \pm n$. Lösningarna är därför

$$R(r) = c r^n + c' r^{-n}$$

om $n > 0$ resp.

$$R(r) = c + c' \ln r$$

om $n = 0$. Detta fall kan avfärdas på liknande grunder.

Om slutligen $\lambda < 0$, sätter vi $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$ och får Bessels ekvation, med lösningar

$$R(r) = c J_n(\mu r) + c' Y_n(\mu r).$$

Här förkastas Y_n som är singulär i 0. Då återstår $J_n(\mu r)$, och randvillkoret ger $J_n(\mu R_0) = 0$. Vi kan skriva $\mu = \lambda_{kn}/R_0$,

där λ_{kn} , $k = 1, 2, \dots$, betecknar de positiva nollställena till J_n . Vi har därmed

$$R(r) = J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0} \right).$$

För λ får vi alltså värdena $\lambda = -(\lambda_{kn}/R_0)^2$, och ekvationen för Z är därför $Z'' = (\lambda_{kn}/R_0)^2 Z$. Det betyder att

$$Z(z) = \alpha \cosh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0} + \beta \sinh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0}.$$

Randvillkoret för $z = 0$ medför att $\alpha = 0$, och vi kan sätta $Z(z) = \sinh \lambda_{kn} z / R_0$. De separerade lösningarna blir nu

$$J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0} \right) (a \cos n\theta + b \sin n\theta) \sinh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0},$$

där $n = 0, 1, \dots$ och $k = 1, 2, \dots$.

Som lösning u ansätter vi en summa av separerade lösningar, alltså

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0} \right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) \sinh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0}.$$

Det återstående randvillkoret, för $z = \ell$, medför då

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0} \right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) \sinh \frac{\lambda_{kn} \ell}{R_0} \\ = r \cos \theta + r \sin \theta.$$

Som funktion av θ är vänsterledet en Fourierserie, som på grund av högerledets utseende bara kan innehålla termer med $n = 1$. Övriga a_{kn} och b_{kn} måste vara 0. För termerna med $\cos \theta$ får vi därför

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_1 \left(\frac{\lambda_{k1} r}{R_0} \right) a_{k1} \cos \theta \sinh \frac{\lambda_{k1} \ell}{R_0} = r \cos \theta,$$

och motsvarande för $\sin \theta$. I denna likhet kan faktorerna $\cos \theta$ strykas, och det gäller att utveckla funktionen r i ortogonalbasen $J_1(\lambda_{k1} r / R_0)$ på intervallet $(0, R_0)$, med vikt

$w(r) = r$. Koefficienterna blir

$$a_{k1} \sinh \frac{\lambda_{k1} \ell}{R_0} = \frac{1}{\|J_1(\lambda_{k1} r / R_0)\|_r^2} \int_0^{R_0} r J_1 \left(\frac{\lambda_{k1} r}{R_0} \right) r dr.$$

Den viktade normen här återfinns i BETA 12.4, sidan 275, och man får

$$a_{k1} = \frac{2}{R_0^2 J_2(\lambda_{k1})^2 \sinh(\lambda_{k1} \ell / R_0)} \int_0^{R_0} r J_1 \left(\frac{\lambda_{k1} r}{R_0} \right) r dr.$$

Samma resonemang för termerna med $\sin \theta$ ger att $b_{k1} = a_{k1}$. Ett korrekt och fullt tillräckligt svar på uppgiften är därför

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} J_1 \left(\frac{\lambda_{k1} r}{R_0} \right) (\cos \theta + \sin \theta) \sinh \frac{\lambda_{k1} z}{R_0},$$

med a_{k1} enligt ovan.

Men värdet av integralen i uttrycket för a_{k1} kan, efter variabeltransformationen $s = \lambda_{k1} r / R_0$, fås från BETA 12.4, sjätte raden i den stora rutan på sidan 274. Resultatet blir att koefficienterna ges av det enklare uttrycket

$$a_{k1} = \frac{2R_0}{\lambda_{k1} J_2(\lambda_{k1}) \sinh(\lambda_{k1} \ell / R_0)}.$$