

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA, 2014" (två sidor).

Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 50.

Betygsgränser: betyg 3: 23, betyg 4: 31, betyg 5: 39.

Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

1. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell, \ t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, \ u_x(\ell, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x - x^2, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

(8)

2. Funktionen f ges av $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \cos n\pi x$. Beräkna $\int_0^3 f(x) dx$ och $\int_0^3 f(x)^2 dx$. (2+6)
3. Finn en lösning $u = u(x, t)$ till ekvationen $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t + u$ i området $x > 0, t > 0$ som uppfyller $u(0, t) = \sin t, t > 0$, och $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, x > 0$. (8)
4. Ett linjärt tidsinvariant dynamiskt system svarar med utsignalen $\chi_{(c-b, c+b)}$ på insignalen $\chi_{(-a, a)}$. Här är $a, b > 0$ och $c \in \mathbb{R}$, och som vanligt betecknar χ_I för ett intervall I den funktion som har värdet 1 på I och 0 utanför I . Ange systemfunktionen. Vad blir svaret på insignalen $\sin \alpha t$? (3+5)

5. Lös ekvationen $\Delta u = 0$ i halvcylindern

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, y > 0, 0 < z < L\}$$

med randvärdena $u(x, y, 0) = xy$ för $x^2 + y^2 < 1, y > 0$ och $u = 0$ på de övriga delarna av randen. (8)

6. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}$, båda 0 utanför ett begränsat intervall, och anta att $\int g(x) dx = 1$. Sätt $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$ för $\epsilon > 0$. Mot vad konvergerar faltningen $f * g_\epsilon(x)$ då $\epsilon \rightarrow 0$? Bevisa konvergensen. (2+3)
7. Ge exempel på ett fullständigt och ett ofullständigt ortogonalsystem i något L^2 -rum (ange vilket), båda bestående av oändligt många vektorer. Motivera ofullständigheten i det valda exemplet. (1+2+2)