

**LÖSNINGAR TILL**  
**tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2**  
**och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Uppgift 1.

Detta är ett standardproblem för variabelseparation. Vi söker separerade lösningar  $u(x, t) = X(x)T(t)$  till differentialekvationen och randvillkoren (ej initialvillkoret) och får på vanligt sätt att

$$\frac{1}{k} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda,$$

för någon konstant  $\lambda$ , och  $X'(0) = X'(\ell) = 0$ .

För  $X$  har vi nu en situation som vi känner igen. Man betraktar som vanligt de tre fallen  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  och  $\lambda < 0$ . Resultatet blir att  $\lambda = -(n\pi/\ell)^2$  för något  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  och att  $X(x)$  är (proportionell mot)  $\cos n\pi x/\ell$ .

Eftersom  $T'(t) = k\lambda T(t)$ , ser vi att  $T(t)$  är (proportionell mot)  $\exp(k\lambda t) = \exp(-kn^2t/\ell^2)$ .

Som separabla lösningar har vi därför

$$\cos \frac{n\pi x}{\ell} \exp \left( -\frac{kn^2t}{\ell^2} \right). \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nu ansätter vi som lösning  $u$  en linjärkombination av dessa, alltså

$$(1) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \exp \left( -\frac{kn^2t}{\ell^2} \right).$$

Det återstår att använda initialvillkoret för att bestämma koefficienterna  $a_n$ . Det ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} = x - x^2, \quad 0 < x < \ell.$$

Vi skall alltså utveckla högerledet här i cosinusserie i  $(0, \ell)$ . Det är detsamma som att utveckla den jämna fortsättningen av högerledet i det symmetriska intervallet  $(-\ell, \ell)$ .

Termen  $x^2$  är jämn, och dess utveckling hittar man i BETA 13.1 (13):

$$x^2 = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Fortsättningen av termen  $x$  blir förstås  $|x|$  i  $(-\ell, \ell)$ . Dess utveckling finner man i BETA 13.1 (3) med  $\alpha = 1$  och  $h = L = \ell$  eller, kanske något enklare, BETA 13.1 (6), som med  $h = L = \ell$  ger utvecklingen av  $\ell - x$ . Se också "Några tips om Fourierserier mm. i BETA, 2014". I varje fall blir resultatet

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{\ell}.$$

Genom att bilda skillnaden mellan dessa två serier får vi koefficienterna  $a_n$ , med olika uttryck för udda och jämna  $n$ :

$$a_0 = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell^2}{3}$$

och

$$a_{2m} = -\frac{\ell^2}{\pi^2} \frac{1}{m^2}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

samt

$$a_{2m-1} = \frac{4(\ell^2 - \ell)}{\pi^2} \frac{1}{(2m-1)^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Svaret på uppgiften blir (1) med ovanstående värden på  $a_n$ .

## Uppgift 2.

För att verifiera att man kan beräkna den första integralen genom att integrera termvis uppskattar vi absolutbeloppen av termerna i denna funktionsserie. Man har

$$|3^{-n} \cos n\pi x| \leq 3^{-n}.$$

Eftersom  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} < \infty$ , säger Weierstrass majorantsats (M-test) att funktionsserien konvergerar likformigt, på hela  $\mathbb{R}$ . Likformigheten medför att termvis integration är tillåten, så

$$\int_0^3 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \int_0^3 \cos n\pi x dx.$$

Integralen i högerledet är  $\frac{1}{n\pi}[\sin n\pi x]_0^3 = 0$ , förutsatt att  $n \neq 0$ . För  $n = 0$  blir integralen 3, så  $\int_0^3 f(x) dx = 3$ .

För att beräkna  $\int_0^3 f(x)^2 dx$  kan man använda Parsevals formel, eftersom vi har en Fourierserie. Om man hämtar Parsevals formel ur BETA 13.1 sidan 312, får man att

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2},$$

där

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega x$$

och  $\Omega = 2\pi/T$ . (Här förutsätts allt vara reellvärt.) I vårt fall har vi  $\Omega = \pi$ , så  $T = 2$ . Formeln ger alltså integralen av  $f(x)^2$  över ett intervall av längd 2, som är perioden för  $f$ . För att få integralen över  $(0, 3)$  observerar vi att  $f$  är jämn, så att

$$\int_0^3 f(x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 f(x)^2 dx = \frac{3}{2} \int_0^2 f(x)^2 dx,$$

den sista likheten eftersom  $(-3, 3)$  är tre perioder. Koefficienterna ges av  $a_0 = 2$  och  $a_n = 3^{-n}$  för  $n \geq 1$ , så Parseval säger att

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f(x)^2 dx = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2n} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{9} \frac{1}{1 - 1/9} = \frac{17}{16}.$$

Vi får

$$\int_0^3 f(x)^2 dx = \frac{51}{16}.$$

*Alternativ.* Eftersom BETA inte är särskilt användarvänlig här, kan man i stället utgå från ortogonaliteten. Man vet att funktionerna  $\cos nx$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , bildar ett ortogonalsystem på  $(0, \pi)$ , så att  $\cos n\pi x$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , är ortogonala på  $(0, 1)$ . Det sistnämnda systemet är ortogonalt även på  $(1, 2)$  och  $(2, 3)$ , eftersom en translation med  $\pi$  betyder teckenbyte för cosinusfunktionen. Alltså är  $\cos n\pi x$  ortogonala även på  $(0, 3)$ . Det betyder att om man utvecklar kvadraten

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \cos n\pi x \right)^2$$

och integrerar, kommer bara diagonaltermerna att överleva integrationen och ge bidrag till integralens värde. Det innebär att

$$\int_0^3 f(x)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-2n} \int_0^3 \cos^2 n\pi x dx.$$

Integralerna i högerledet räknar man ut genom att gå över till "dubbla vinkeln", eller också vet man att medelvärdet av  $\cos^2$  i sådana här fall blir  $1/2$ . Man får  $\int_0^3 \cos^2 n\pi x dx = 3/2$  för  $n > 0$ . Men observera att för  $n = 0$  är denna integral i stället 3. Det följer att

$$\int_0^3 f(x)^2 dx = 3 + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2n} = 3 + \frac{3}{2} \frac{1}{1 - 1/9} = \frac{51}{16}.$$

*Anm.* Man kan räkna ut  $f$  explicit, genom att skriva om sinusfunktionerna i termer av  $e^{\pm i \dots}$  och summera geometriska serier. Eller också kan man slå upp serien i BETA 13.1(29). Men detta gör det knappast enklare att beräkna integralerna.

### Uppgift 3.

Området är en kvadrant, och de två initialvillkoren för  $t = 0$  är homogena. Därför är det rimligt att försöka med Laplacetransformen i  $t$ -variabeln.

Sätt alltså  $U(x, z) = \mathcal{L}u(x, z)$ . Initialvillkoren gör att Laplacetransformerna av  $u_t$  och  $u_{tt}$  blir  $zU$  resp.  $z^2U$ . Den transformerade differentialekvationen blir därför

$$U_{xx}(x, z) = (z^2 - 2z + 1)U(x, z).$$

För fixt  $z$  har vi här en ordinär differentialekvation i  $x$ -variabeln. Dess karakteristiska ekvation är  $r^2 = z^2 - 2z + 1$ , dvs.  $r^2 = (z - 1)^2$  med rötter  $r = \pm(z - 1)$ . Det räcker att betrakta stora positiva, reella värden på  $z$  (eftersom Laplacetransformen är en analytisk funktion av  $z$ , som är entydigt bestämd av sina värden för sådana  $z$ ). Den allmänna lösningen till den ordinära differentialekvationen är då

$$U(x, z) = ae^{(z-1)x} + be^{-(z-1)x},$$

där "konstanterna"  $a$  och  $b$  är oberoende av  $x$  men kan bero av  $z$ . Den första termen har ett så snabbt växande för stora  $x$  och  $z$  att vi förkastar den; uppgiften går ut på att hitta en lösning till problemet. Vi sätter alltså  $a = 0$ .

Nu Laplacetransformerar vi randvillkoret för  $x = 0$  och får enligt BETA 13.5, L24 att

$$U(0, z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Om vi jämför med uttrycket för  $U(x, z)$  ovan, ser vi att  $b = 1/(1 + z^2)$ , så att

$$U(x, z) = e^x e^{-zx} \frac{1}{1 + z^2}.$$

För att finna den inversa Laplacetransformen av detta observerar vi att multiplikation av en Laplacetransform med  $e^{-cz}$  motsvarar translation på funktionssidan; se BETA 13.5, L4. Här är  $c$  en konstant, i vårt fall är  $c = x$ . Eftersom  $1/(1 + z^2)$  är Laplacetransformen av  $\sin t$ , får vi svaret

$$u(x, t) = e^x \sin(t - x) \chi_{\{t > x\}},$$

där den sista faktorn är 1 då  $t > x$  och annars 0.

*Anm. 1* Vi behövde aldrig utnyttja att Laplacetransformen av  $\sin t$  är  $1/(1+x^2)$ . Det hade gått bra att bara skriva  $\mathcal{L}(\sin t)(z)$ .

*Anm. 2* Ett alternativ är att sätta  $v(x, t) = e^{-t}u(x, t)$ , som visar sig satisfiera den vanliga vågekvationen.

Uppgift 4.

Vi Fouriertransformerar de givna in- och utsignalerna, och får

$$\hat{\chi}_{(-a, a)}(\omega) = 2 \frac{\sin a\omega}{\omega},$$

med en enkel uträkning eller med BETA 13.2, F50, och

$$\hat{\chi}_{(c-b, c+b)}(\omega) = 2e^{-ic\omega} \frac{\sin b\omega}{\omega},$$

där vi också använde den enkla regeln för Fouriertransformen av ett translat, se BETA 13.2, F7. Systemfunktionen  $h$  är kvoten mellan Fouriertransformerna för utsignal och insignal, och den blir alltså

$$h(\omega) = e^{-ic\omega} \frac{\sin b\omega}{\sin a\omega}.$$

Om impulssvaret betecknas  $H$ , är  $h = \hat{H}$ , och svaret på insignalen  $\sin \alpha t$  är faltningen  $H * \sin \alpha t$ , vars värde i  $t$  är

$$\begin{aligned} \int H(s) \sin \alpha(t-s) ds &= \frac{1}{2i} \int H(s) (e^{i\alpha(t-s)} - e^{-i\alpha(t-s)}) ds \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i\alpha t} \hat{H}(\alpha) - e^{-i\alpha t} \hat{H}(-\alpha)) = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha(t-c)} - e^{-i\alpha(t-c)}) \frac{\sin b\alpha}{\sin a\alpha}. \end{aligned}$$

Det sista uttrycket, som också kan skrivas

$$\frac{\sin b\alpha}{\sin a\alpha} \sin \alpha(t-c),$$

är den efterfrågade utsignalen.

Uppgift 5.

Differentialekvationen är homogen, liksom alla randvillkoren utom det för  $z = 0$  (halvcylinderns botten). Därför variabelseparerar vi lämpligen i cylinderkoordinater  $(r, \theta, z)$ . Då söker vi  $u$  av formen

$$u(x, y, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z),$$

som ska uppfylla differentialekvationen och alla randvillkoren utom det för  $z = 0$ . Randvillkoren ger då att  $R(1) = \Theta(0) = \Theta(\pi) = Z(L) = 0$ . Differentialekvationen blir på vanligt sätt

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Detta medför att kvantiteten

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

måste vara konstant, säg  $\lambda$ . Då blir

$$Z''(z) = -\lambda Z(z)$$

och

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Även detta måste vara konstant, säg  $\mu$ . Eftersom då  $\Theta''(\theta) = -\mu\Theta(\theta)$  och  $\Theta$  är 0 i punkterna 0 och  $\pi$ , följer det på känt sätt att  $\mu = n^2$  och att  $\Theta(\theta)$  är proportionell mot  $\sin n\theta$  för något  $n = 1, 2, \dots$ .

Då får vi för  $R$  ekvationen

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - (\lambda r^2 + n^2) R(r) = 0.$$

För  $\lambda > 0$ , säg  $\lambda = \nu^2$  med  $\nu > 0$ , har vi här den modifierade Bessелеkvationen, med lösningar som är linjärkombinationer av  $I_n(\nu r)$  och  $K_n(\nu r)$ . Men  $K_n(\nu r)$  är obegränsad vid 0 och förkastas därför, och  $I_n(\nu r)$  har inget nollställe på  $\mathbb{R}_+$ , vilket inte går ihop med randvillkoret för  $r = 1$ . Därför förkastas dessa lösningar.

Om  $\lambda = 0$  har vi en Eulerekvation, och ansatsen  $R(r) = r^\gamma$  ger lösningar  $r^{\pm n}$ . Dessa förkastas av liknande skäl som i föregående fall.

Om  $\lambda > 0$  skriver vi  $\lambda = -\nu^2$  med  $\nu > 0$  och har Bes-sels ekvation för  $R$ . Lösningarna är linjärkombinationer av  $J_n(\nu r)$  och  $Y_n(\nu r)$ , och  $Y_n(\nu r)$  förkastas pga. singulariteten i 0. Då återstår  $J_n(\nu r)$ , som skall vara 0 för  $r = 1$ . Det betyder att  $\nu$  måste vara ett av nollställena  $\lambda_{n,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , för  $J_n$  på  $\mathbb{R}_+$ . Alltså är  $R(r) = \text{konst. } J_n(\lambda_{n,k} r)$ .

För  $Z$  har vi nu ekvationen  $Z''(z) = \lambda_{n,k}^2 Z(z)$ . En bas för Lösningssrummet till denna ekvation ges av  $\cosh \lambda_{n,k} z$  och  $\sinh \lambda_{n,k} z$ ; en annan, som är mera praktisk att använda för oss, är  $\cosh \lambda_{n,k}(L - z)$ ,  $\sinh \lambda_{n,k}(L - z)$ . Eftersom  $Z(L) = 0$  blir bara  $\sinh \lambda_{n,k}(L - z)$  kvar.

Vi kan nu ange de separerade lösningarna, nämligen

$$J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k}(L - z), \quad n, k = 1, 2, \dots$$

Som lösning till hela problemet ansätter vi då

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k}(L - z).$$

För att bestämma koefficienterna  $a_{n,k}$  använder vi randvillkoret för  $z = 0$ , som ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k} L = r^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Summan i  $n$  kan vi här se som en Fourier-sinusserie i  $\theta$ -variabeln. För att utveckla högerledet i en sådan serie skriver man det lämpligen som  $\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$ . Det betyder att man bara har koefficienter med  $n = 2$ , dvs. att  $a_{n,k} = 0$  så snart  $n \neq 2$ . Då återstår ekvationen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} J_2(\lambda_{2,k} r) \sinh \lambda_{2,k} L = r^2/2.$$

Detta är en utveckling i ortogonalsystemet  $J_2(\lambda_{2,k} r)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , på intervallet  $(0, 1)$ , med vikten  $r$ . Med hjälp av

BETA 12.4, (i) på sidan 275, blir därför

$$a_{2,k} = \frac{1}{J_3(\lambda_{2,k}) \sinh \lambda_{n,k} L} \int_0^1 r^3 J_2(\lambda_{2,k} r) dr.$$

Svaret på uppgiften är alltså

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k} (L - z),$$

med ovanstående  $a_{2,k}$ .