

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA, 2014" (två sidor).

Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 62.

Betygsgränser: betyg 3: 30, betyg 4: 40, betyg 5: 50.

1. Utveckla funktionen $f(x) = x^2$ i sinusserie i intervallet $[0, \ell]$, där ℓ är en positiv konstant. Ange också i vilka punkter serien konvergerar och vad dess summa är, och förklara varför. (5+3)
2. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 2, \quad u(\ell, t) = 1, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2(x - \ell), & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Här är k och ℓ positiva konstanter. (8)

3. Betrakta följande Sturm-Liouville-problem i intervallet $[0, 3]$:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(3) = 0.$$

Hur många egenvärden med $\lambda < 2$ finns det? (9)

4. Finn en lösning $u = u(x, t)$ till ekvationen $u_t = ku_{xx} - bu_x$ i övre halvplanet $\{(x, t) : t > 0\}$, med initialvärden $u(x, 0) = f(x)$ för $x \in \mathbb{R}$. Här är $f \in L^1(\mathbb{R})$ en given funktion, och $b \in \mathbb{R}$ och $k > 0$ är konstanter. Svara med ett så explicit uttryck som möjligt. (9)

5. Bestäm den bästa approximationen $B(x)$ av funktionen

$$f(x) = |x|, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

med polynom av grad högst 3, mätt med normen i rummet $L^2[-1, 1]$. Beräkna också $\|f - B\|$, där normen tas i samma L^2 -rum. (6+2)

6. Lös Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i cylindern

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, \quad 0 < z < L\}$$

med randvärden $u(x, y, 0) = u(x, y, L) = 0$ för $x^2 + y^2 < 1$ och $u(x, y, z) = 1$ för $x^2 + y^2 = 1, \quad 0 < z < L$. (8)

7. Formulera och bevisa satsen om punktvis derivering av Fourierserier. Det räcker att betrakta komplexa Fourierserier i intervallet $[-\pi, \pi]$. (6)
8. Beskriv superpositionsmetoden för att lösa PDE-problem med givna randvillkor och ev. initialvillkor. (6)