

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA, 2014" (två sidor).

Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 51.

Betygsgränser: betyg 3: 25, betyg 4: 33, betyg 5: 41.

1. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2, & 0 < x < \ell, \ t > 0 \\ u(0, t) = -2, \ u(\ell, t) = 2, & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 + 2, & 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (8)$$

2. Ett linjärt, tidsberoende dynamiskt system har systemfunktionen

$$S(\omega) = \frac{1 - e^{i\omega}}{\omega}.$$

Vad blir systemets svar på insignalen $\frac{1}{1+t^2}$? (8)

3. Finn en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + x + t, & x > 0, \ t > 0 \\ u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, & x > 0, \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant. (8)

4. Funktionen $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, har en utveckling i Hermitepolynom $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$. Bestäm koefficienterna c_0, c_1, c_2, c_3 . (8)

5. Ett svängande, cirkulärt membran med radie R_0 beskrivs av en funktion $u(x, y, t)$ som satisfierar vågekvationen $u_{tt} = c^2 \Delta u$. Här är $c > 0$ en konstant. Membranets periferi är fixerad, så att $u(x, y, t) = 0$ för $x^2 + y^2 = R_0^2$ och alla $t \geq 0$. I startögonblicket $t = 0$ är $u = 0$ och $u_t = xy$. Bestäm u . Svaret får innehålla svårberäknade integraler. (9)
6. Anta att en funktion är 2π -periodisk och styckvis glatt. Formulera en sats som anger var dess Fourierserie konvergerar och vad seriens summa då är. Bevisa satsen för en kontinuitetspunkt. (2+3)
7. Låt $w(x) = x$ i intervallet $(0, 1)$. Ge exempel på ett fullständigt och ett ofullständigt ortogonalsystem i det viktade rummet $L_w^2(0, 1)$. Båda skall bestå av oändligt många funktioner. (2+3)