

Extra övningsuppgifter i Fourieranalys 2014

Här betyder θ Heavisidefunktionen, även betecknad H eller $\chi_{(0,\infty)}$. Om E är en mängd, är $\chi_E(x)$ den karakteristiska funktionen för E , alltså den funktion som är 1 då $x \in E$ och 0 annars.

1. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk, och $f(x) = (x+1)^2$ för $-1 < x < 1$. Utveckla $f(x)$ i komplex Fourierserie. Sök en 2-periodisk lösning till ekvationen

$$2y'' - y' - y = f(x).$$

2. Funktionen $f(t)$ är 3-periodisk, och

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{för } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{för } 1 < t < 2, \\ 3-t & \text{för } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

- a) Utveckla f i Fourierserie. (Det kan underlätta att rita några perioder av grafen för f .)
b) Bestäm, i form av en Fourierserie, en periodisk lösning till differentialekvationen

$$y'' + 3y = f(t).$$

3. Utveckla funktionen $\cos x$ i sinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}.$$

4. Låt $f(t) = 1 - t^2$ för $|t| \leq 1$ och låt f vara 2-periodisk. Bestäm en begränsad lösning till

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, -\infty < t < \infty, \\ u(0, t) = f(t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$ i cirkelringen $1 < r < 2$ (polära koordinater) med randvillkoren $u(1, \theta) = 0$, $u(2, \theta) = f(\theta)$, där $f(\theta)$ är 2π -periodisk, och

$$f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \quad \text{för } |\theta| \leq \pi.$$

6. Fouriertransformera

a) $\frac{t}{(t^2 + a^2)^2}$, b) $\frac{1}{(t^2 + a^2)^2}$, c) $\frac{t}{(t^2 + 1)(t^2 + 2t + 5)}$,
d) $e^{-a|t|} \sin bt$ ($a > 0, b > 0$), e) $\frac{t}{t^2 + 2t + 5}$.

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^4}$. Beräkna

a) $\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$, b) $f'(0)$.

8. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\frac{1-i\omega}{1+i\omega} \frac{\sin \omega}{\omega}$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

9. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx$ med hjälp av Fouriertransform.

10. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\frac{1}{|\omega|^3 + 1}$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f * f|^2 dt$, där $*$ betyder faltning.

11. Ange Fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Beräkna a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos t dt$, b) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

12. Låt $f(t) = \int_0^1 \sqrt{\omega} e^{\omega^2} \cos \omega t d\omega$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt$.

13. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u'(t) + 2u(t) + e^{-2t} \int_{-\infty}^t e^{2\tau} u(\tau) d\tau = \delta(t).$$

14. Lös integralekvationen

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^0 e^{\tau} u(t-\tau) d\tau = \sqrt{3}u(t) - e^{-|t|}.$$

15. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u(t) + \int_{-\infty}^t e^{\tau-t} u(\tau) d\tau = e^{-2|t|}.$$

16. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{1+t^2}$ ger upphov till utsignalen $\frac{t}{(4+t^2)^2}$. Beräkna impulssvaret och svaret på $\cos \omega t$. Är systemet kausalt? Är det stabilt?

17. Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret $h(t) = e^{-4t^2}$. Låt $y(t)$ vara svaret på insignalen e^{-t^2} . Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t) y(t) dt$.

18. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{4+t^2}$ ger upphov till utsignalen e^{-t^2} . Beräkna utsignalen (i form av en komplex Fourierserie), då insignalen är impulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(t-2n) - \delta(t-2n-1)].$$

19. Låt $x(n)$ vara N -periodisk, och

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 \leq n \leq k-1, \\ 0, & \text{då } k \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Beräkna den diskreta Fouriertransformen av x och använd Parsevals formel för att beräkna

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{1 - \cos \frac{2\pi\mu k}{N}}{1 - \cos \frac{2\pi\mu}{N}}.$$

20. Bestäm den diskreta Fouriertransformen till signalen (sekvensen) $x(n) = \sin \frac{n\pi}{N}$, $n = 0, \dots, N-1$, och $x(n)$ N -periodisk.

21. Visa att funktionerna $\varphi_n(x) = \frac{\sin x}{\pi x} e^{inx}$ är parvis ortogonala i $L^2(\mathbf{R})$. Bestäm talen c_n så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^N c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

minimeras. Är ortogonalsystemet $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ fullständigt?

22. Bestäm den lösning $y(x)$ till $y'' - y = 0$ som minimerar $\int_{-1}^1 [1 + x - y(x)]^2 dx$.

23. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < a, \\ f(0) - f'(0) = 0, & f(a) + 2f'(a) = 0. \end{cases}$$

24. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} -e^{-4x} \frac{d}{dx} \left(e^{4x} \frac{du}{dx} \right) = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.

25. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y, & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = y - y^3, & u(2, y) = 0. \end{cases}$$

26. Lös problemet

$$\begin{cases} \sqrt{1+t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

27. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} + 20u = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = x^2 - x. \end{cases}$$

28. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x. \end{cases}$$

29. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = t + 1, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - x. \end{cases}$$

30. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, $1 < r < 2$, (polära koordinater i planet) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 0 \text{ för } r = 1, & u'_r = 0 \text{ för } r = 2, \\ u = 0 \text{ för } \theta = 0, & u = r - 1 \text{ för } \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

31. Utveckla funktionen $\sin(2 \sin x)$ i trigonometrisk Fourierserie (reell form).

32. Ett cirkulärt membran med radie a påverkas av en periodisk yttre kraft $q \sin \omega t$ likformigt fördelad över membranet. För de transversella svängningarna har vi alltså ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S} \sin \omega t, \quad u|_{r=a} = 0.$$

Bestäm den stationära svängningsrörelsen (dvs. en lösning av formen $u(r, t) = v(r) \sin \omega t$). Vilka är resonans(vinkel)frekvenserna?

33. Lös värmeledningsekvationen $u'_t = \Delta u \equiv \nabla^2 u$ i en cylinder med radien b . Ändytorna är isolerade, medan mantelytan $r = b$ (cylinderkoordinater) lyder avsvälningsslagen $u + 2u'_r = 0$. Begynnelsetemperaturen är $u|_{t=0} = r^2 = x^2 + y^2$.

34. a) Bestäm en begränsad lösning av formen $u(r, t) = v(r)e^{i\omega t}$ till ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} u, & 0 < r < a, \\ u(a, t) = e^{i\omega t}, \end{cases}$$

där $n \geq 0$ är ett heltal. För vilka värden på $\omega > 0$ finns en sådan lösning?

b) Låt ω vara sådant att lösningen i a) existerar. Visa hur den kan användas för att lösa

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} u, & 0 < r < a, t > 0, \\ u(a, t) = \sin \omega t, & u \text{ begränsad,} \\ u(r, 0) = 0, & u_t(r, 0) = 0. \end{cases}$$

Eventuellt förekommande integraler behöver inte beräknas.

35. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$, $0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin \frac{\pi z}{L} (1 - \cos \frac{\pi z}{L})$ för $r = R$.

36. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_0^\infty [\sqrt{x} - P(x)]^2 e^{-x} dx \text{ så liten som möjligt.}$$

37. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_{-\infty}^\infty [x^4 - P(x)]^2 e^{-x^2/2} dx \text{ så liten som möjligt.}$$

38. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_0^\infty [e^{x/4} - P(x)]^2 x e^{-x} dx \text{ så liten som möjligt.}$$

39. Bestäm det polynom av formen $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ för vilket

$$\int_0^1 [P(x)]^2 dx \text{ är så litet som möjligt.}$$

40. Visa att $\int_0^1 x P_{2m}(x) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{3/2}{m+1} \right)$. Vad blir $\int_0^1 x P_{2m+1}(x) dx$?

41. Beräkna, t.ex. med hjälp av den genererande funktionen, $H'_n(0)$, där H_n är Hermites polynom.

42. Visa följande formel för Laguerrepolynomen $L_n^\alpha(x)$, där $\alpha > -1$:

$$\frac{d}{dx} L_{n+1}^\alpha(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

Ledning: Använd den genererande funktionen.

43. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ med randvillkoret $u = z(x^2 + y^2)$ då $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

44. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < a < r < b$ (sfäriska koordinater¹) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 1 + \cos \theta, & \text{då } r = a, \\ u = \cos 2\theta, & \text{då } r = b. \end{cases}$$

45. Sök en begränsad lösning till

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

46. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0 < x < 1, -\infty < y < \infty, \\ u'_x(0, y) = 0, \\ u(1, y) = ye^{-|y|}. \end{cases}$$

47. Låt f tillhöra $L^2(\mathbf{R})$ och sök en lösning till

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, 0 < y < a, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, a) = f(x). \end{cases}$$

Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

48. Bestäm en periodisk lösning till ekvationen $y'' - y' + y = f'(t)$, där

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 < t \leq 1, \\ t - 1 & \text{för } 1 < t < 2, \end{cases}$$

och f är periodisk med period 2. (Med $f'(t)$ avses distributionsderivatan.)

49. Om funktionen f gäller att

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{för } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{för } 1 < t < 3, \end{cases}$$

och att $f(t)$ är 3-periodisk. Bestäm $f'(t)$ (distributionsderivatan) och utveckla $f'(t)$ i komplex triogonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna Fourierserieutvecklingen av $f(t)$.

50. Beräkna följande funktion (dvs beräkna summan och uttryck den m.h.a. kända funktioner)

$$f(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3}$$

51. Beräkna den komplexa Fourierserien till den 2π -periodiska funktion $f(x)$ som är lika med $x(x^2 - \pi^2)$ i $[-\pi, \pi]$. Vad är seriens summa i punkterna 2π och $3\pi/2$?

52. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + 1 = \frac{1}{4}u_{tt}, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(x, 0) = x - x^2, \\ u(2, t) = -2, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

¹ $x = r \cos \phi \sin \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \theta$

53. Lös följande Dirichletproblem på enhetsskivan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

med $u = f$ på randen $r = 1$, där f är funktionen $f(\theta) = \sin^2 \theta + \cos \theta$ (i polära koordinater)

54. Låt

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^n(1-x)^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Q_n är ett polynom av grad n .

(a) Bestäm den ledande termen och den konstanta termen i $Q_n(x)$.

(b) Bestäm normen $\|Q_n\|$ av $Q_n(x)$ i $L^2(0, 1)$.

(c) Bevisa att $Q_n(x)$ och $Q_m(x)$ är ortogonala i $L^2(0, 1)$ om $n \neq m$.

55. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi) = \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}$. Bestäm $f(0)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

56. Bestäm lösningen $f(t)$, $t > 0$, till ekvationen

$$f''(t) - 4f'(t) + f(t) + 6 \int_0^t f(\tau) d\tau = 2e^t$$

med begynnelsevillkor $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

57. Låt $u(x, t)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Bevisa att för $t > 0$,

$$\int_0^\pi |u_t(x, t)|^2 dx \leq \int_0^\pi |g(x)|^2 dx.$$

(Ledning: Lös uppgiften med variabelseparation).

58. För vilka k kan Du garantera $f \in C^{(k)}$, där

$$(a) \quad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(n\theta)}{3^n}$$

$$(b) \quad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(2^n \theta)}{3^n}$$

59. Bestäm den elektrostatiske potentialen $\varphi(x, y)$ i området $D = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < \pi\}$, om potentialen på randen är

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{om } y = 0, \text{ och } x < 0, \\ 0, & \text{om } y = 0, \text{ och } x > 0, \\ 0, & \text{om } y = \pi. \end{cases}$$

60. Undersök hur avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar enhetscirkeln $|z| = 1$ respektive cirkelskivan $|z| < 1$. Använd resultatet för att bestämma den elektrostatiske potentialn $\varphi(x, y)$, ($z = x + iy$) i enhetscirkelskivan $|z| < 1$ med randvärdena

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} P, & \text{om } |z| = 1, \quad x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{om } |z| = 1, \quad x < 0, \text{ eller } y < 0. \end{cases}$$

61. Låt T vara triangelområdet med hörn i 0, 1 och $1 + i$. Bestäm bilden av T under avbildningen $w = \frac{z}{1-z}$.
62. Bestäm den elektrostatiske potentialen $\varphi(x, y)$ i området $D = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ om potentialen på randen är
- $$\varphi(x, y) = \begin{cases} \alpha, & (x, y) \in \partial D, & x^2 + y^2 > r^2, \\ \beta, & (x, y) \in \partial D, & x^2 + y^2 \leq r^2. \end{cases}$$
63. Sök en harmonisk funktion $\varphi(x, y)$ i området mellan hyperblerna $x^2 - y^2 = 1$ och $x^2 - y^2 = 4$ med randvärden $\varphi(x, y) = 2xy$ på $x^2 - y^2 = 1$ och $\varphi(x, y) = 4xy$ på $x^2 - y^2 = 4$.
64. Låt Ω vara området mellan cirkeln $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ och x -axeln. Betrakta potentialproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, & \text{i } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{på } x\text{-axeln}, \\ \varphi = 1, & \text{på cirkeln } x^2 + (y - 2)^2 = 1. \end{cases}$$

Låt $z = x + iy$. a) Visa att avbildningen $w = \frac{z - i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}}$ avbildar Ω på området mellan två cirklar (vilka?).

b) Lös därefter potentialproblemet.

65. För ett linjärt tidsinvariant system ger insignalen $\theta(t)e^{-2t}$ upphov till utsignalen $t^2\theta(t)e^{-3t}$. Vad blir utsignalen $y(t)$ om insignalen $x(t)$ är 2π -periodisk och $x(t) = t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex Fourierserie.
66. a) Använd definitionen av faltning för att beräkna $F = f * f$, där $f = \chi_{(-a, a)}$ för något $a > 0$. Man kan här ha hjälp av en enkel, endimensionell figur. Rita också grafen för F .
b) Vad är Fouriertransformen av denna faltning?
67. Bestäm Fouriertransformen av karakteristiska funktionen för intervallet (a, b) , både genom direkt beräkning och via det kända fallet $(-a, a)$.
Varning: Att se denna funktion som skillnaden mellan två translater av Heavisidefunktionen, vars Fouriertransform går att hitta i tabell, leder till ett betydligt trassligare uttryck.

Svar

1. $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+in\pi)}{n^2} e^{in\pi x}, \quad y = -\frac{4}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+in\pi)}{n^2(2n^2\pi^2+in\pi+1)} e^{in\pi x}$
2. a) $f(t) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi}{3}}{n^2} \cos \frac{2n\pi t}{3}$ b) $y(t) = \frac{2}{9} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi}{3}}{n^2(3 - \frac{4}{9}n^2\pi^2)} \cos \frac{2n\pi t}{3}$
3. $\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$ Summan blir $\frac{\pi^2}{64}.$
4. $u(x, t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2} e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}x} \cos \left(n\pi t - \sqrt{\frac{n\pi}{2}}x \right)$
5. $\frac{2}{3\ln 2} \ln r + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(2^n - 2^{-n})} (r^n - r^{-n}) e^{in\theta}$
6. a) $-\frac{i\pi}{2a} \omega e^{-a|\omega|}$ b) $\frac{\pi}{2a^3} (1 + a|\omega|) e^{-a|\omega|}$ c) $\frac{\pi}{10} e^{-|\omega|} (1 - 2i \operatorname{sgn} \omega) - \frac{\pi}{10} e^{-2|\omega|} e^{i\omega} \left(\frac{3}{2} - 2i \operatorname{sgn} \omega \right)$
d) $-\frac{4iab\omega}{(\omega^2 + 2b\omega + a^2 + b^2)(\omega^2 - 2b\omega + a^2 + b^2)}$ e) $-\frac{\pi}{2} e^{i\omega} e^{-2|\omega|} (1 + 2i \operatorname{sgn} \omega)$
7. a) i b) $\frac{i}{2\sqrt{2}}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\pi(1 - e^{-1})$
10. $\frac{1}{9\pi}$
11. $\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}$ för $0 < \omega < 2$, 0 för övrigt. a) $\frac{\pi}{2}$, b) $2\pi \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right)$
12. $\frac{\pi}{8}(e^2 + 1)$
13. $\theta(t)e^{-2t} \cos t$
14. $u(t) = \frac{1}{2} e^{-t/\sqrt{3}} \theta(t) + \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}t} (1 - \theta(t))$
15. $\frac{3}{4} e^{-2|t|} - t e^{-2t} \theta(t)$
16. $h(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{t}{(1+t^2)^2}; \quad x(t) = \cos \omega t$ ger $y(t) = \frac{\omega}{4} e^{-|\omega|} \sin \omega t$; ej kausalt men stabilt.
17. $\frac{\pi}{2\sqrt{6}} e^{-5/96}$
18. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2}(-1)^n \right] e^{-n^2\pi^2/8+2|n|\pi} e^{in\pi t}$
19. summan blir $k(N - k).$
20. $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \mu n/N} = \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\cos \frac{2\mu\pi}{N} - \cos \frac{\pi}{N}}$

$$21. c_n = \begin{cases} \pi(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})e^{-|n|} & \text{för } n \neq 0 \\ 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}}) & \text{för } n = 0. \end{cases}$$

Systemet är ej fullständigt.

$$22. \frac{2 \sinh 1}{\frac{1}{2} \sinh 2 + 1} \cosh x + \frac{2e^{-1}}{\frac{1}{2} \sinh 2 - 1} \sinh x$$

$$23. \text{Egenvärden: } \lambda_k = \nu_k^2, \text{ där } \nu_k \text{ är de positiva rötterna till ekvationen } \tan \nu a = \frac{3\nu}{2\nu^2 - 1}.$$

Egenfunktioner: $\nu_k \cos \nu_k x + \sin \nu_k x$.

$$24. \lambda_1 = 4 - \beta_1^2, \text{ där } \beta_1 \text{ är den positiva roten till ekv. } \tanh \beta = \frac{\beta}{2}; u_1(x) = e^{-2x} \sinh \beta_1 x$$

$$\lambda_n = 4 + \beta_n^2, \text{ där } \beta_n, n = 2, 3, \dots, \text{ är de positiva rötterna till ekv. } \tan \beta = \frac{\beta}{2}; u_n(x) = e^{-2x} \sin \beta_n x$$

$$e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_n}[\sqrt{\lambda_n} + 2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n - 2)} u_n(x)$$

$$25. u(x, y) = \frac{1}{6}(y^3 - y) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \sinh 2n\pi} (\sinh n\pi x + 7 \sinh n\pi(2-x)) \sin n\pi y$$

$$26. u(x, t) = 1 - x + \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{2}{3}(2k+1)^2 \pi^2 [(1+t)^{3/2} - 1]} \sin(2k+1)\pi x$$

$$27. u(x, y) = -\frac{8}{\pi^3} \sin \pi x \frac{\sin(\sqrt{20 - \pi^2} y)}{\sin \sqrt{20 - \pi^2}} -$$

$$-\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \frac{\sinh(\sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 - 20} y)}{\sinh \sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 - 20}}$$

$$28. u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x + 2\pi \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 \pi^2 - 1} \left[\frac{t}{n^2 \pi^2} - \frac{1}{n^4 \pi^4} (1 - e^{-n^2 \pi^2 t}) \right] \sin n\pi x$$

29.

$$u(x, t) = (t+1)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} (e^{-2n^2 \pi^2 t} - 1) \sin n\pi x =$$

$$= (t+1)(1-x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} - \frac{x^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} e^{-2n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

$$30. u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2[2(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ln 2}(-1)^n - 1]}{(n + \frac{1}{2})\pi[(n + \frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{\ln 2})^2 + 1]} \frac{\sinh(n + \frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{\ln 2}}{\sinh(n + \frac{1}{2})\frac{\pi^2}{4\ln 2}} \sin(n + \frac{1}{2})\frac{\pi \ln r}{\ln 2}$$

$$31. \sin(2 \sin x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(2) \sin(2k+1)x$$

$$32. \frac{qc^2}{S\omega^2} \left(\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)} - 1 \right) \sin \omega t.$$

Resonansfrekvenserna är $\frac{c}{a} \alpha_{0,n}$, där $\alpha_{0,n}$, $n = 1, 2, \dots$, är J_0 :s positiva nollställen.

$$33. u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8b^2[(2 + \frac{b}{2})\alpha_k^2 - 2b]}{\alpha_k^2(4\alpha_k^2 + b^2)J_0(\alpha_k)} e^{-(\frac{\alpha_k}{b})^2 t} J_0\left(\frac{\alpha_k r}{b}\right), \text{ där } \alpha_k \text{ är de pos.rötterna till } J_0(\alpha) + \frac{2}{b}\alpha J_0'(\alpha) = 0.$$

$$34. a) v(r) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)} \text{ om } J_n(\omega a) \neq 0.$$

b) $u(r, t) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\alpha_k t}{a} J_n\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right)$, där α_k är de positiva nollställena till $J_n(x)$, och

$$a_k = -\frac{2\omega}{a\alpha_k[J_{n+1}(\alpha_k)]^2 J_n(\omega a)} \int_0^a J_n(\omega r) J_n\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) r dr \left(= \frac{2\omega a}{(\omega^2 a^2 - \alpha_k^2) J_{n+1}(\alpha_k)} \right)$$

$$35. u(r, z) = \frac{I_0\left(\frac{\pi r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{\pi R}{L}\right)} \sin \frac{\pi z}{L} - \frac{1}{2} \frac{I_0\left(\frac{2\pi r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{2\pi R}{L}\right)} \sin \frac{2\pi z}{L}$$

$$36. \frac{\sqrt{\pi}}{16} (3 + 6x - \frac{1}{2}x^2)$$

$$37. 3(2x^2 - 1)$$

$$38. \frac{8}{81}(x^2 + 12)$$

$$39. x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$$

40. Med udda index $2m + 1$ blir integralen $1/3$ för $m = 0$ och 0 för övriga m .

$$41. H'_{2k}(0) = 0, \quad H'_{2k+1}(0) = 2(-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$43. u = \frac{2}{5}R^2z + \frac{3}{5}(x^2 + y^2 + z^2)z - z^3$$

$$44. u(r, \theta) = \frac{1}{3(b-a)} \left(\frac{4ab}{r} - 3a - b \right) + \frac{a^2}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{r^2} - r \right) \cos \theta + \\ + \frac{2b^3}{3(b^5 - a^5)} \left(r^2 - \frac{a^5}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$45. u(x, t) = \frac{4kt + 1 - 2x^2}{(4kt + 1)^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}$$

$$46. u(x, y) = \frac{1}{6}(x^3 - 1) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta}{(1 + \eta^2)^2} \frac{\cosh \eta x}{\cosh \eta} \sin \eta y d\eta$$

47. Tips: Genom att Fouriertransformera i x -variabeln får man att lösningens Fouriertransform ges av

$$\hat{u}(\xi, y) = \frac{\sinh \xi y}{\sinh \xi a} \hat{f}(\xi).$$

Använd nu Plancherels sats för att få den sökta olikheten. Lösningen kan skrivas som

$$u(x, y) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\cosh \frac{\pi(x-t)}{a} + \cos \frac{\pi y}{a}} f(t) dt.$$

$$48. y(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{n\pi - i(1 - (-1)^n)}{2n\pi(n^2\pi^2 - 1 + in\pi)} e^{in\pi t}$$

$$49. f'(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(t - 3n - 1) - \delta(t - 3n)] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2}{3} (e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1) e^{in\frac{2\pi}{3}t}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1}{in\pi} e^{in\frac{2\pi}{3}t}$$

$$50. f(\theta) = -\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{\pi}{2}\theta), \text{ om } \theta > 0 \text{ och } f(\theta) = -f(-\theta) \text{ om } \theta < 0.$$

$$51. 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}. \quad 0 \text{ resp } \frac{3}{8}\pi^3.$$

$$52. u(x, t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos((2k+1)\pi t) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)$$

53. $u(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + x + \frac{1}{2}$ eller $u(r, \theta) = -\frac{1}{2}r^2 \cos 2\theta + r \cos \theta + \frac{1}{2}$ (i polärkoordinater).
54. (a) ledande termen är $(-1)^n(2n)(2n-1)\dots(n+1)$, konstanta termen är $n!$ (b) $n!/\sqrt{2n+1}$.
55. $f(0) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
56. $f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.
- 57.
58. (a) alla k (b) $k \leq 1$
59. $\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{e^x - \cos y}{\sin y}$.
60. $\varphi(x, y) = \frac{P}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{(1-x)^2 + (1-y)^2 - 1}{1-x^2-y^2}$.
61. Bildområdet är: $\{w = (u, v) : u \geq -1, v \geq 0, (u + \frac{1}{2})^2 + (v - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{2}\}$.
62. $\varphi(x, y) = \alpha + \frac{\alpha-\beta}{\pi} \left[\operatorname{arccot} \frac{(x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2 + r^4}{4xy(x^2-y^2)} - \operatorname{arccot} \frac{(x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2 - r^4}{4xy(x^2-y^2)} \right]$.
63. $\varphi(x, y) = \frac{2}{3}xy(x^2 - y^2 + 2)$.
64. a) Det sammanhängande området Ω avbildas på området mellan de koncentriska cirkelarna $|w| = 1$ och $|w| = 2 - \sqrt{3}$.
b) $\varphi(x, y) = \frac{1}{2 \ln(2-\sqrt{3})} \ln \frac{x^2 + (y-\sqrt{3})^2}{x^2 + (y+\sqrt{3})^2}$.
65. $y(t) = \frac{4\pi}{27} + \sum_{n \neq 0} \frac{i2(2+in)}{n(3+in)^3}$.
66. a) $F(x) = 2a - |x|$ om $|x| < 2a$, annars 0 b) $\hat{F}(\xi) = 4 \frac{\sin^2 a\xi}{\xi^2}$.
67. $\frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}$ eller $2e^{-i(a+b)\xi/2} \frac{\sin(b-a)\xi/2}{\xi}$, som är samma sak.