Föreläsning 1

Review of algebra

Algebraiska förenkligar (s.1-3)

Kvadreringsreglerna: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Konjugatregeln: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Kuberingsreglerna $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Faktoruppdelningar: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Vi använder reglerna för att faktorisera eller utveckla polynom.

Ex. Faktorisera $12x^4 - 2x^5 - 18x^3$.

$$12x^4 - 2x^5 - 18x^3 = 2x^3(6x - x^2 - 9)$$
$$= -2x^3(x^2 - 6x + 9) = -2x^3(x-3)^2.$$

Ni måste kunna
- pq - formel (s. 5)
- Kvadrat komplettering (s.4)
- faktorisering (s.3)

Olikheter (s. 8-10)

Regler för olikheter:

1. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

2. $a < b$ och $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

3. $a < b$ och $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

4. $a < b$ och $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ (ändra tecken)

5. $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (ändra tecken).

Ex. Lös olikheter:

1) $3 - 2x \leq 4$

2) $-x^2 + 3x < 0$.

Lösning: 1) $3 - 2x \leq 4 \Leftrightarrow -2x \leq 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

2) $-x^2 + 3x = x(-x+3) < 0$.

	$-\infty$	0		3	∞
x	$-$	0	$+$		$+$
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$x(-x+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

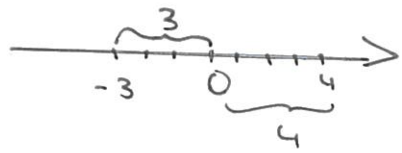
$\Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$

Absolutbelopp (s.10-11)

Absolutbeloppet $|a|$ är avståndet mellan 0 och a på tallinjen.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Ex. $|-3| = -(-3) = 3$

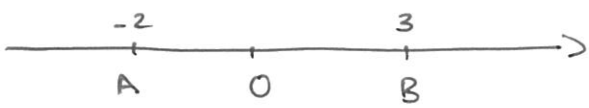


$|0| = 0$

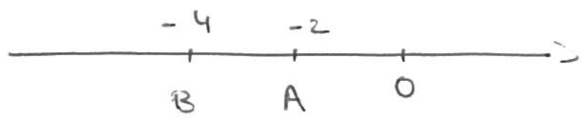
$|4| = 4$

Ex. Beräkna avståndet mellan punktena A och B.

a)



b)



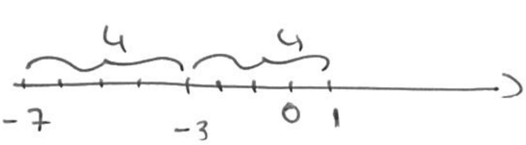
Lösning: a) $AB = |x_B - x_A| = |3-(-2)| = 5$

b) $AB = |x_B - x_A| = |-4-(-2)| = |-2| = 2$

Avståndet mellan punkterna $A\,(x_A)$ och $B\,(x_B)$ på tallinjen är lika med $|x_B - x_A|$.

Ex. Finn alla tal x sådana att avståndet från x till -3 är lika med 4.

Lösn. $|x-(-3)| = 4 \iff |x+3| = 4 \iff \begin{cases} x+3 = 4 \\ \text{eller} \\ x+3 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{eller} \\ x = -7 \end{cases}$



- Likheter med absolutbeloppet

$$|x| = k \iff x = k \text{ eller } x = -k \quad (k>0)$$

<u>OBS</u> Om $k<0$ är $|x|=k$ olösbar

- Olikheter med absolutbeloppet $(a>0)$

$$|x| \le a \iff -a \le x \le a$$

$$|x| \ge a \iff x \ge a \text{ eller } x \le -a$$

<u>Ex.</u> $-2|x+7| < -12 \iff |x+7| > \frac{-12}{-2} = 6$

$$\iff x+7>6 \text{ eller } x+7<-6$$

$$\iff x>-1 \text{ eller } x<-13$$

$$\iff x \in (-\infty; -13) \cup (-1; +\infty)$$

<u>Kvadratrötter</u> (s.11)

Låt $a \ge 0$. Med Kvadratroten ur a, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, menas det <u>icke-negativa</u> reella tal, vars kvadrat är a.

<u>Ex.</u> $\sqrt{4} = 2$ inte -2

Vad är $\sqrt{a^2}$?.

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \; (= -(-3))$

I allmänt, $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{om } a \ge 0 \\ -a & \text{om } a<0 \end{cases}$ dvs. $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

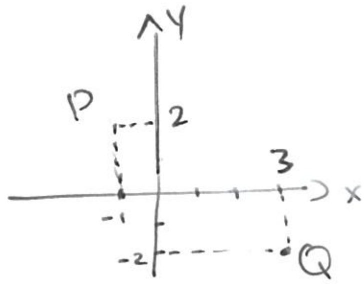
Review of analytic algebra

Cirklar

En punkt P i planet har en x-koordinat och y-koordinat och representeras med ett talpar (x, y) (ordnat par)

Ex. $P = (-1; 2)$

$Q : (3, -2)$



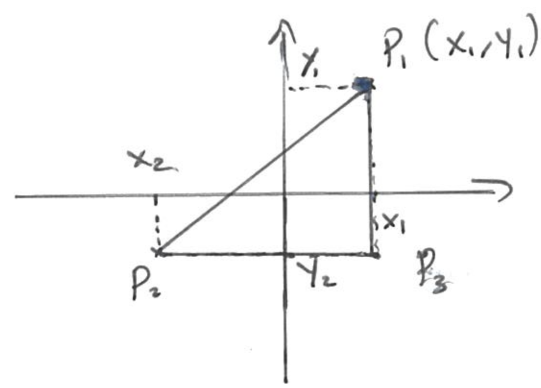
För att beräkna avståndet mellan två punkter $P_1(x_1, y_1)$ och $P_2(x_2, y_2)$, låt $P_3(x_1, y_2)$ och tillämpa Pythagorus i rätta triangeln $P_1 P_2 P_3$.

$$P_1P_2^2 = P_2P_3^2 + P_1P_3^2$$

$$= |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Ex. Avståndet mellan punkterna $A(\frac{1}{2}, 2)$ och $B(-\frac{3}{2}, 1)$ är :

$$AB = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2})^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

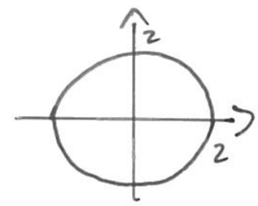
Def: Grafen till en ekvation är mängden av alla punkter vars koordinater uppfyller ekvationen.

Ex: Rita grafen till $x^2+y^2=4$

Låt $M(x,y)$ så att $x^2+y^2=4 \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 2$. Detta betyder att avståndet mellan origo och M är lika med 2 $(OM=2)$

Alltså är grafen en cirkel centrerad på origo och med radie 2.

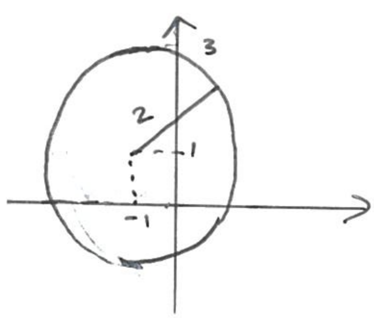


I allmänt, låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $r>0$.

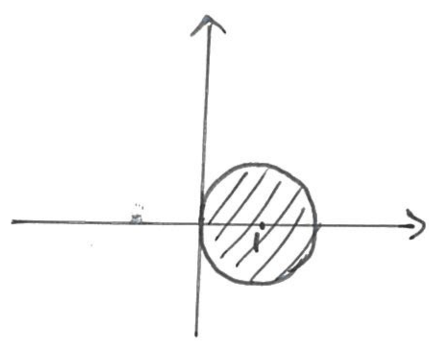
* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ är ekvationen av en cirkel centrerad i punkten $A(a,b)$ och med radie r.

* $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ (eller $\leq r^2$) är ekvationen av en cirkelskiva centrerad i (a,b) och med radie r.

Ex.



$(x+1)^2+(y-1)^2=2$



$(x-1)^2+y^2 \leq 1$

Linjer

Def: En icke-vertikal rät linje är grafen till en ekvation av formen $y = mx + b$ där m och b är konstanter i $\mathbb{R}$

m kallas för lutning (slope) och b för y-intercept.

Om en linje går genom två punkter $A(x_1, y_1)$ och $B(x_2, y_2)$ så kan man bestämma en ekvation av linjen (AB).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{och} \quad b = y_1 - ax_1$$

Ex. En ekvation till linjen som går genom $A(1,2)$ och $B(-1,3)$ är:

$$m = \frac{3-2}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \qquad b = 2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 1 = 2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

- För två linjer $y_1 = k_1 x + m_1$, $y_2 = k_2 x_2 + m_2$ gäller att:

(i) $k_1 = k_2 \iff$ linjerna är parallella

(ii) $k_1 \cdot k_2 = -1 \iff$ linjerna är vinkelräta (perpendicular)

Ex. Bestäm en ekvation till linjen som är vinkelrät till linjen $y_1 = 2x + 3$ och går genom $A(2;1)$

Lös. $2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$. $\qquad b = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 = 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2.$$