Förläsning 2

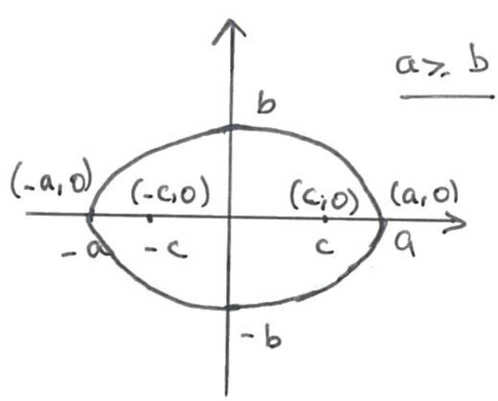
Ellipser (s. 676-677)

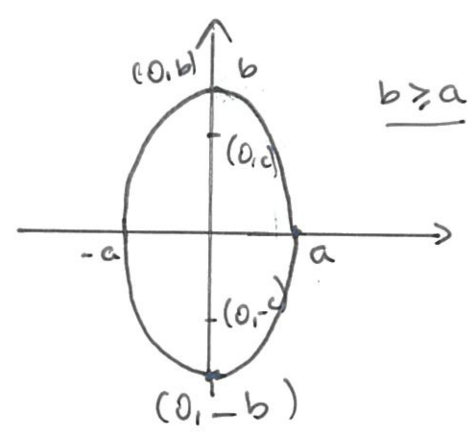
Def: En ellips är grafen till en ekvation av formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{där } a, b > 0.$$

Om $a \geq b$ kallas punkterna $(\pm a, 0)$ ellipsens transversala punkter (eng: vertices) och $(\pm c, 0)$ där $c^2 = a^2 - b^2$ ellipsens brännspunkter (eng. foci)

Om $a \leq b$ är punkterna $(0, \pm b)$ och $(0, \pm c)$ ellipsens transversal - resp. brännspunkter, där $c^2 = b^2 - a^2$





Anm. Om M är en punkt på ellipsen och C och D är brännspunkterna så gäller att $CM + DM$ är konstant för alla M.

Ex. Bestäm transversal- och brännpunkter av följande ellipser:

(i) $x^2 + 3y^2 = 1$

(ii) $2x^2 + 3y^2 = 2$

(ii) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Lösning (i) $x^2+3y^2=1 \iff x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1 \iff \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2}=1$

$\Rightarrow a=1$ och $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a>b \Rightarrow$ transversala punkterna är $(\pm 1; 0)$

$c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{2}{3}}$

brännspunkterna är $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right)$

(ii) $4x^2+3y^2=2 \iff 2x^2+\frac{3}{2}y^2=1 \iff \frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1 \iff \frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2/3})^2}=$

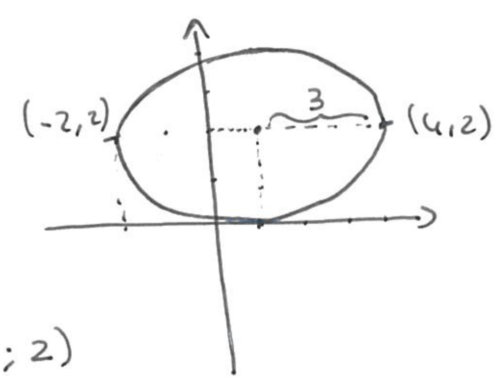
$\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$a<b \Rightarrow$ transversala punkterna är $\left(0; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$c^2=b^2-a^2=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ brännspunkterna är $\left(0; \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

(iii) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

I det här fallet är ellipsen inte centrerad på origo, utan i punkten $(1, 2)$.



$a=3$, $b=2$, $a>b \Rightarrow c^2=a^2-b^2=5$

$\Rightarrow c=\sqrt{5}$.

transversala punkter är $(1\pm 3; 2)$

som är $(4; 2)$ och $(-2; 2)$

Brännspunkterna är $(1\pm\sqrt{5}; 2)$.

1.1 - 1.2 Funktioner

Def. En funktion f från A till B är en regel som kopplar till varje element a i A endast ett element b i B. Detta skrivs $f: A \to B$, $f(a) = b$.

A kallas för definitionsmängd (domain) och B för målmängd (codomain).

Vi kommer endast att studera reellvärda funktioner. För dessa gäller att:

1. Målmängd är alltid $\mathbb{R}$
2. Definitionsmängd är antingen $\mathbb{R}$ eller en delmängd av $\mathbb{R}$.

Anm1: Definitionsmängd av f brukar skrivas D_f.

Anm2: Om definitionsmängd ges inte så är den mängden av alla tillåtna x-värden.

Ex. Bestäm D_f för följande funktioner:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

2. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 6x + 9}$

Lösn. 1. $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) = D_f$

2. $x^2 - 6x + 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty; 3) \cup (3, +\infty)$

Def: Två funktioner f och g är lika med varandra

$(f = g)$ om och endast om $\begin{cases} 1. \ D_f = D_g \\ 2. \ f(x) = g(x) \quad \text{för alla } x \in D_f. \end{cases}$

Ex. 1) $f(x) = x + 1$ och $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

är inte lika med varandra även om

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = f(x)$$

eftersom $D_f = \mathbb{R}$ och $D_g = (-\infty; 1) \cup (1, +\infty)$.

2) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 6x + 9}$ och $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

D_f : $x^2 - 6x + 9 \neq 0 \iff (x-3)^2 \neq 0 \iff x \neq 3$

D_g : $x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3$.

$\Rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

och $f(x) = \dfrac{x - 3}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{x - 3} = g(x)$

$\Rightarrow f = g$.

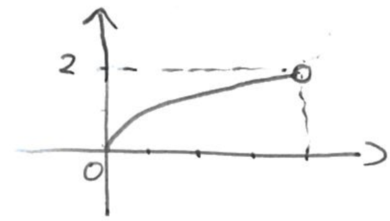
Def. Alla värden som en funktion f kan anta kallas för f:s värdemängd (eng. range) och betecknas V_f.

Ex. Bestäm D_f och V_f till $f(x) = \sqrt{x - 3} + 2$.

D_f: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, \infty)$

V_f : $\sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} + 2 \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow V_f = [2, +\infty)$

Def: Grafen till en funktion f är mängden av alla punkter $(x, f(x))$ för $x \in D_f$.



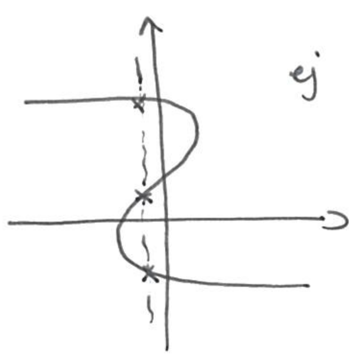
Ex. $f: [0,4) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0,4)$, $V_f = [0,2)$
$\uparrow$
$0 \leq x < 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 2.$

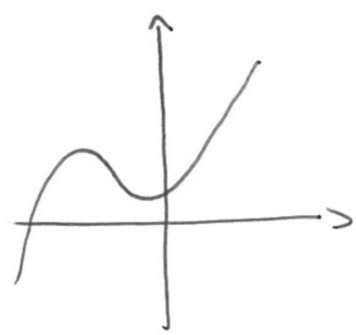
Vertikal Linje test

För att bestämma om en graf är en graf till en funktion kan man använda vertikal linjal testen som säger:
Om varje vertikal linje skär grafen i högst en punkt så är den en graf till en funktion.

Ex.



ej funktion



funktion.

Def: Låt f vara en funktion så att $-x \in D_f$ då $x \in D_f$.

f kallas: (a) jämn (even) om $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f$
för alla

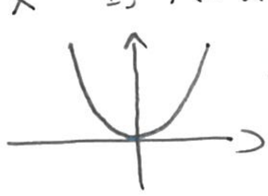
(b) udda (odd) om $f(-x) = -x$.

Om f är jämn så är grafen till f symmetrisk kring y-axeln.

Om f är udda så är grafen symmetrisk kring origo.

Ex. 1) $f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow$ jämn

2) $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \Rightarrow$ udda



$f(x) = x^2$

$f(x) = x^3$.

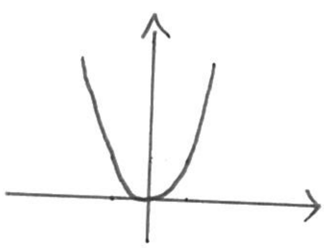
1.3 Nya funktioner ur gamla

Låt $f(x)$ vara en funktion och $c > 0$. För att få grafen till

1. $y = f(x) + c$, flytta grafen till $y = f(x)$ c steg uppåt
2. $y = f(x) - c$, flytta grafen till $y = f(x)$ c steg nedåt
3. $y = f(x - c)$, flytta grafen till $y = f(x)$ c steg till höger
4. $y = f(x + c)$, flytta grafen till $y = f(x)$ c steg till vänster.

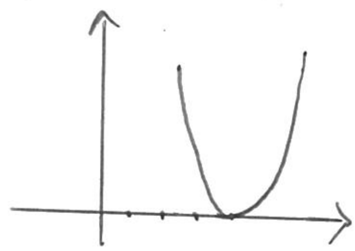
Ex. Rita grafen till $y = (x-4)^2 + 2$

Börja med $y = x^2$, flytta 4 steg till höger, flytta 2 steg uppåt

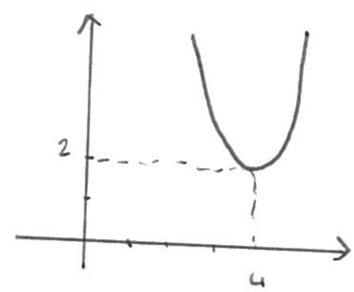


$y = x^2$

$\rightarrow$



$y = (x-4)^2$



$y = (x-4)^2 + 2.$

För att få grafen till

1. $y = cf(x)$, sträck grafen till $y = f(x)$ vertikalt med en faktor c
2. $y = \frac{1}{c} f(x)$, Krymp grafen till $y = f(x)$ vertikalt med en faktor c
3. $y = f(cx)$, sträck grafen till $y = f(x)$ horizontalt med en faktor c
4. $y = f(\frac{1}{c}x)$, Krymp grafen till $y = f(x)$ horizontalt med en faktor c
5. $y = f(-x)$, reflektera grafen till $y = f(x)$ kring y-axeln
6. $y = -f(x)$, reflektera grafen till $y = f(x)$ kring x-axeln.

Givet två funktioner f och g kan vi kombinera dessa för att få nya funktioner.

(i) $f+g$ (ii) $f-g$ (iii) $f.g$.

(iv) $\frac{f}{g}$ (v) $k.f$, $k \in \mathbb{R}$.

(i) - (iii) $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$.

(iv) $D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x \mid g(x) \neq 0\}$

(v) $D_{kf} = D_f$. $k \neq 0$ och $D_0 = \mathbb{R}$.

<u>Ex.</u> $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, \infty)$.

$h(x) = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow D_h = [0, \infty)$.

$k(x) = \frac{f}{g} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow D_k = [0, \infty) \setminus \{0\} = (0, \infty)$.

<u>Sammansätta funktioner.</u>

Givet två funktioner f och g låter vi $g \circ f$ beteckna sammansättningen av f och g, dvs. $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g \circ f(x)$$

<u>Ex.</u> $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$. $D_f = [0, \infty)$ $D_g = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$ $D_{g \circ f} = [0, \infty)$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \sqrt{e^x}$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

<u>OBS!</u> I allmänt $f \circ g \neq g \circ f$.