Föreläsning 5. 2.4. Formell definition of gränsvärde

Antag att $\lim_{x \to a} f(x) = L$ där $a, L \in \mathbb{R}$. Detta innebär att vi kan få avståndet mellan $f(x)$ och L hur litet som helst, genom att låta x komma tillräckligt nära a.

Avståndet mellan $f(x)$ och $L = |f(x) - L|$

Avståndet mellan x och $a = |x - a|$

Så kan man skriva:

$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff$ för alla $\varepsilon > 0$, finns $\delta > 0$ så att

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dvs, för att visa att $\lim_{x \to a} f(x) = L$ måste man bestämma ett litet tal $\delta > 0$ så att $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0.$

Ex. Visa att $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3.$

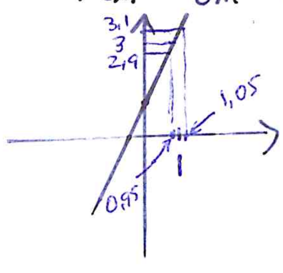
Låt ε vara ett litet tal > 0. Vi vill att $|2x + 1 - 3| < \varepsilon$ för alla x, $|x - 1| < \delta$ för något $\delta > 0$.

$$|2x + 1 - 3| < \varepsilon \iff |2x - 2| < \varepsilon \iff |2(x - 1)| < \varepsilon$$

$$\iff 2|x - 1| < \varepsilon \iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alltså, om $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$.

T.ex. om vi tar $\varepsilon = 0{,}1$, $|2x + 1 - 3| < 0{,}1 \iff |2x - 2| < 0{,}1$



$\iff |x - 1| < \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 \Rightarrow \delta = 0{,}05$

eller vi kan använd $\delta = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05.$

2.5 Kontinuitet.

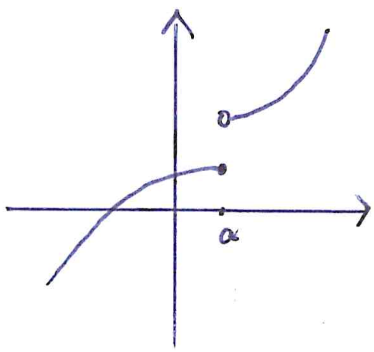
Def: En funktion f är kontinuerlig i $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

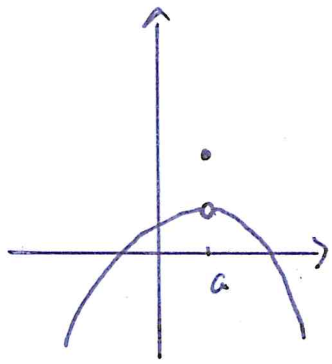
Anm.: f är kontinuerlig i a om de tre konditioner gäller:

1. $a \in D_f$
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

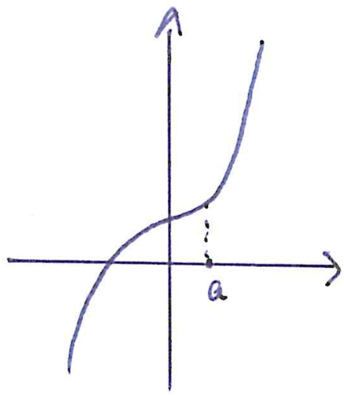
Ex.



ej kontinuerlig i a
$\lim_{x \to a} f(x)$ existerar inte



ej kontinuerlig i a
$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



kontinuerlig i a
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Def: 1) f är högerkontinuerlig i a om $a \in D_f$ och $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

2) f är vänsterkontinuerlig i a om $a \in D_f$ och $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Def: f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ om f är kontinuerlig i alla $x \in (a,b)$, högerkontinuerlig i a och vänsterkontinuerlig i b.

__Regler__ : Antag att f och g är kontinuerliga och $c \in \mathbb{R}$.

Följande funktioner är även kontinuerliga.

1. $f \pm g$ 2. fg 3. cf

4. $\frac{f}{g}$ där $g \neq 0$ 5. $f \circ g$ och $g \circ f$.

Följande klasser av funktioner är alla kontinuerliga där de är definierade:

(i) Polynom

(ii) Rationella funktioner

(iii) Trigonometriska funktioner

(iv) Exponential funktioner

(v) Logaritm funktioner

(vi) Absolutbelopp

__Ex.__ Är f kontinuerlig:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|+2}{x+3} & x > 0 \\ 2x+1 & x \leq 0 \end{cases}$$

f ä kontinuerlig för alla $x > 0$ och $x < 0$.

__För $x = 0$:__

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x-1|+2}{x+3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x+1+2}{x+3} = \frac{3}{3} = 1$$

(nära 0 är $x - 1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = -x+1$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x+1) = 1 = f(0)$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$ kontinuerlig i $0 \Rightarrow f$ kontinuerlig i $\mathbb{R}$.

Satsen om mellanliggande värden. (Intermediate Value Theorem IVT)

Antag att f är definierad och kontinuerlig på $[a,b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$. Med andra ord, om N är mellan $f(a)$ och $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$, finns det $c \in (a,b)$ så att $f(c) = N$.

Ex. Visa att funktionen $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ har en rot mellan 1 och 2.

f är ett polynom $\Rightarrow$ f kontinuerlig.

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 2$$
$$= 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Eftersom $0 \in (-1, 12) \Rightarrow \exists\, c \in (1,2)$ så att $f(c) = 0$

$\Rightarrow$ f har en rot mellan 1 och 2.