

Övning 5

1) Beräkna (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{-4}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x})$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{-4} = \infty \left(\frac{-2}{-4} \right) = -\infty.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) = \infty - \infty \text{ obestämt.}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x} &= \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{x^2 - 2 - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \frac{-2 - x}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{x \left(-\frac{2}{x} - 1 \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}} = \frac{x \left(-\frac{2}{x} - 1 \right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}} + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

Eftersom $x \rightarrow -\infty$ så är x negativt $\Rightarrow |x| = -x$.

$$\Rightarrow \frac{x \left(-\frac{2}{x} - 1 \right)}{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{x \left(-\frac{2}{x} - 1 \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \frac{-\frac{2}{x} - 1}{-\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x} - 1}{-\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

2. Bestäm a och b så att $f(x)$ blir kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < -2 \\ 3a + 2b & x = -2 \\ \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} & x > -2 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Lösning

Då $x < -2$ är $f(x)$ ett polynom så är den kontinuerlig.

Då $x > -2$ är $f(x)$ en rationell funktion så är den kontinuerlig på $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Vi vill studera kontinuitet då $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (ax + b) = -2a + b.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{4 - 6 + 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x-2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

$$f(-2) = 3a + 2b.$$

För att f blir kontinuerlig i $x = -2$ måste man ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

$$\Rightarrow -2a + b = 3a + 2b = \frac{1}{4}.$$

$$-2a + b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4} + 2a$$

$$3a + 2b = \frac{1}{4} \Rightarrow 3a + 2\left(\frac{1}{4} + 2a\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 3a + \frac{2}{4} + 4a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 7a = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{28} \text{ och } b = \frac{1}{4} - \frac{2}{28} = \frac{1}{4} - \frac{2}{28}$$

$$= \frac{7-2}{28} = \frac{5}{28}.$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{28} \text{ och } b = \frac{5}{28}.$$

$$3a + 2b = -\frac{3}{28} + \frac{10}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}; \quad -2a + b = +\frac{2}{28} + \frac{5}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad \text{Det stämmer}$$

Derivator

Ex. 6 s. 148.

Bestäm en ekvation av tangenten till grafen av $y = x^3 - 3x + 1$
i punkten $(2, 3)$

Lös. Låt $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 9$$

$\Rightarrow$ Tangent linjen:

$$y - 3 = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 9(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = 9x - 18 + 3 = 9x - 15.$$

