2.7-2.8 Derivator

Låt $f(x)$ vara en funktion och P en punkt på grafen med koordinater $(a, P(a))$.

Def. Tangentlinjen till graf av f i punkten P är linjen vars ekvationen är $y = mx + b$ där

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

och som går genom P.

Ex. Bestäm en ekvation till tangentlinjen till funktionen $f(x) = x^2 + 2$ i $P(-1, 3)$. $(3 = f(-1))$

Lösn. $y = mx + b.$

$$m = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2.$$

tangenten går genom $P \Rightarrow b = y_p - m x_p = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2x + 1}$$

Anm. Låt $h = x - a$. $\Rightarrow x = h + a$ och om $x \to a \Leftrightarrow x - a \to 0$
$\Leftrightarrow h \to 0$

Så gäller att $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Def. En funktion f sägs vara deriverbar (differentiable) i en punkt $a \in D_f$ om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h}$ existerar.

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ kallas för derivatan (derivative) till $f(x)$ i punkten a och betecknas $f'(a)$.

Anm. (Ekvation av tangenten i termer av derivatan):

Låt $y = mx + b$ vara ekvationen till tangentlinjen till $f(x)$

i punkten $P(a, f(a)) \Rightarrow m = f'(a)$ och $b = y_p - f'(a)\, x_p$
$= f(a) - f'(a) \cdot a$

dvs. $y = f'(a)\, x + f(a) - f'(a) \cdot a$
$= f'(a)(x - a) + f(a)$.

Alltså skrivs ekvationen till tangentlinjen

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Def. En funktion f är deriverbar i ett intervall (a, b) om
f är deriverbar i alla $x \in (a, b)$.

öppet intervall

Derivatan till f ges av:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ex. Derivatan till $f(x) = \sqrt{x}$: $D_f = [0, \infty)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

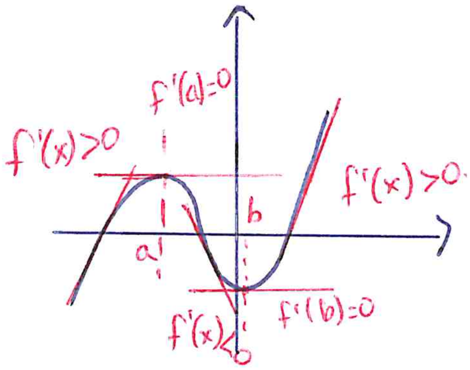
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ för alla $x \in (0, \infty)$.

$f(x) = \sqrt{x}$ är deriverbar för alla $x > 0$, och $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Notation: Derivatan till $f(x)$ skrivs:

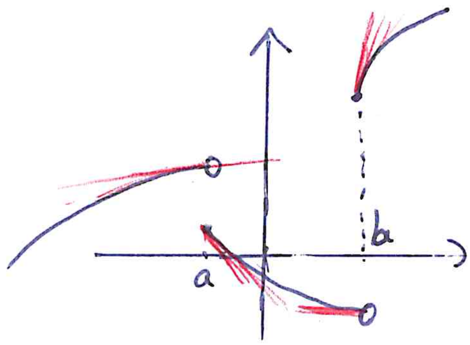
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Anm. $f'(x)$ är en funktion som ger lutning av tangentlinjen för alla x där den är definierad. Alltså om $f'(x) > 0$ så är funktionen växande (increasing), om $f'(x) < 0$ så är f avtagande, (decreasing) om $f'(x) = 0$ då $x = a$ så har f en horizontal tangent i $x = a$ och om $f'(x) = 0$ för $x \in (a,b)$ så är $f(x)$ konstant i intervallet.



x		a		b	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

Vad är relationen mellan kontinuitet och deriverbarhet?

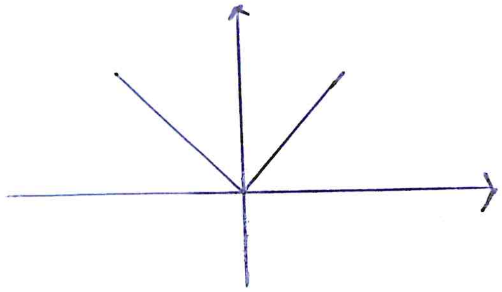


Enligt figuren är det omöjligt att $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ (samma för b) så $f'(a)$ existerar inte!

<u>Sats:</u> Om f är deriverbar i $a \in D_f$ så är f kontinuerlig i $x = a$.

Gäller det omvända? dvs om f är kontinuerlig är f deriverbar?? <u>Nej</u>

Ex. Låt $f(x) = |x|$. f är kontinuerlig i $x=0$

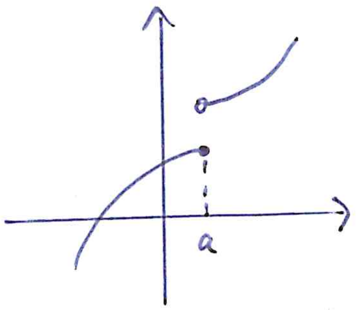


$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

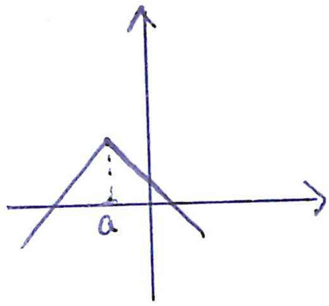
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x} = -1 \end{array}\right\} \neq .$$

$\Rightarrow$ f är inte deriverbar då $x=0$ eftersom $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existerar inte.

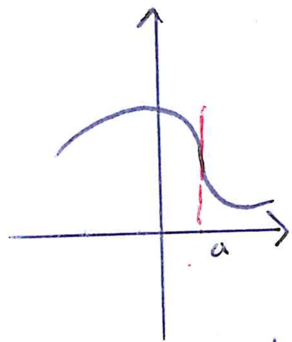
Alla fall då f är inte deriverbar i a:



ej kontinuerlig



hörn punkter



vertikal tangent.

3.1 Derivator: regler och beräkning

Sats: 1) Om $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ (c är en konstant)

2) Om $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, fix, så gäller att $f'(x) = rx^{r-1}$

ex. 1) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

2) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Sats Om f och g är deriverbar så gäller att:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx} = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ex. 1) $f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$

2) $f(x) = x^{5/2} - x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$

3) $f(x) = 3x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 0$.

4) $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} = x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-2}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 6x^{-3}$.

Sats: Om $f(x) = e^x$ så gäller att $f'(x) = e^x$

(den endast funktion som är lika med sin derivata).

Ex. $f(x) = 2e^x + 3x$. I vilken punkt är lutning till tangentent lika med 4?

Lösn. $f'(x) = 4 \Leftrightarrow 2e^x + 3 = 4 \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$