3.2 Produkt- och Kvotregeln

- Beräkna derivatan till $h(x) = (x^2 - x)(x^3)$

$h(x) = x^5 - x^4 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 - 4x^3.$

- Låt $f(x) = x^2 - x$ och $g(x) = x^3$. Beräkna $f'(x) \cdot g'(x)$:

$$f'(x) \cdot g'(x) = (x^2 - x)' \cdot (x^3)' = (2x-1)\, 3x^2 = 6x^3 - 3x^2.$$

OBS! $\quad h'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x).$

Produktregel: Om f och g är deriverbara i $x \in D_f \cap D_g$

så är $f \cdot g$ deriverbart i x och

$$\left(f(x)\, g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x)\, f'(x)$$

Ex. $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x + xe^x = e^x(1+x).$

Bevis: $$(fg)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) \right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \right)$$

$$= f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x).$$

Sats: f deriverbart i $x \in D_f$ och $f(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

Bevis: $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)\,f(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(f(x+h) - f(x))}{f(x)\,f(x+h)} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(- \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)\cdot f(x+h)}\right)$$

$$= -f'(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^2} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Kvotregel: f, g deriverbara i $x \in D_f \cap D_g$, $g(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}$$

Bevis: $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$ (Produktregel)

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$ (Enligt satsen)

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$ (gemensam nämnar

Ex. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 + 1}$. $\quad (x^2-2)' = 2x$. $\quad (x^3+1)' = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2-2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 6x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 + 6x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}$$

3.4 Kedjeregeln (Chain rule)

Sats: (Kedjeregeln) Antag att g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i x och

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ex. Beräkna derivatan till:

1) $f(x) = \sqrt{x^3 + x}$ 2) $g(x) = e^{3x^2}$ 3) $h(x) = e^{-\sqrt{x^2+1}}$

Lösn. 1) Låt $u(x) = x^3 + x \Rightarrow u'(x) = 3x^2 + 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+x}} \cdot u' = \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}.$$

2) Låt $u = 3x^2 \Rightarrow u' = 6x$.

$$g'(x) = e^{3x^2} \cdot u' = 6x e^{3x^2}.$$

3) $u = -\sqrt{x^2+1} \Rightarrow u' = -\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot e^{-\sqrt{x^2+1}}.$$

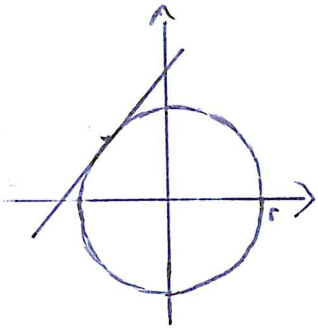
Ex.

* $f(x) = (e^x + 2x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(e^x + 2x)^2 \cdot (e^x + 2)$
* $f(x) = \frac{1}{e^{2x}+1} = (e^{2x}+1)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(e^{2x}+1)^{-2} \cdot 2e^{2x}$

$$= -\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

3.5 Implicit derivering (Implicit differentiation)

Antag att vi vill bestämma ekvationen till tangentlinjen till en cirkel i en punkt a.



Cirkeln definieras inte av en funktion så man kan inte skriva $f(x) = ..$ och beräkna $f'(x)$. Alltså använder man implicit derivering.

Låt $x^2 + y^2 = r$ vara en ekvation till cirkeln i figuren.

Betrakta y som $y(x)$ och derivera båda sidor m.a.p. x:

$$x^2+y^2=r \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{dr}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} \quad \text{då } y \neq 0.$$

Om $r=2$ och vi vill beräkna lutning till tangentlinjen i punkten $(-1; \sqrt{3}) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(-1, \sqrt{3}) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Ekvation till tangenten: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + b$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + b \\ b = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(-1) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ex. Bestäm y' .. $x^2 + 2x - xy = x^3$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x-xy) = \frac{dx^3}{dx} \Leftrightarrow 2x+2-\frac{d}{dx}(xy) = 3x^2.$$

Kedje regeln.

$$\Leftrightarrow 2x+2-3x^2 = \frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$$

$$\Leftrightarrow 2x+2-3x^2-y = xy' \Leftrightarrow y' = 2+\frac{2}{x}-3x-\frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$