Föreläsning 3

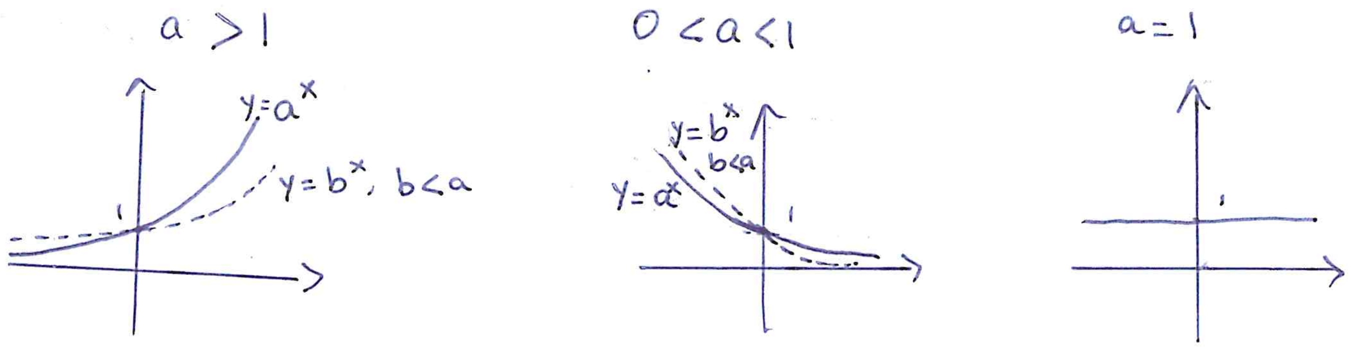
1.4 Exponentialfunktioner

Funktionen $f(x) = a^x$ där $a > 0$ är en konstant och $x \in \mathbb{R}$ är en variabel kallas för exponentiala funktionen.

Exponentiallagarna: $a, b > 0$ $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$.

Grafen till $f(x) = a^x$



Naturliga exponential funktionen

Om $a = e = 2,7\ldots$ så kallas funktionen $y = e^x$ den naturliga exponential funktionen. Grafen till $y = e^x$ har en lutning $= 1$ i punkten $x = 0$.

Anm. 1) $f(x) = a^x$, $D_f = \mathbb{R}$ och $V_f = (0, \infty)$. för alla $a \neq 1$.

(Om $a = 1$ $V_f = \{1\}$.)

2) $a^0 = 1$, dvs grafen går genom $(0, 1)$

1.5 Inversen och logaritma funktioner

Låt $y=f(x)$ vara en funktion. För varje x finns endast ett y. Ibland är man intresserad att beräkna x för ett givet värde x. Om till varje y finns endast ett värde x så har f en inversfunktion.

Def: Funktionen f säges vara injektiv (eng. one-to-one) om

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

eller ekvivalent,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Def. Om f är injektiv så finns det en invers funktion f^{-1} så att: $f^{-1}: V_f \longrightarrow D_f$, $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$.

$(D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f)$. Vi säger att f är omvänbara

Ex. Visa att $f(x)=2x-1$ är injektiv och beräkna inversen.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f$ är injektiv.

Inversen: $y=2x-1 \Rightarrow y+1=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}(y+1)$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y+1), \text{ eller } f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1).$$

Sats Om f är omvändbara och f^{-1} är inversen så har vi $f(f^{-1}(x))=x \quad \forall x \in D_{f^{-1}}$ och $f^{-1}(f(x))=x \quad \forall x \in D_f$

Ex. $f(x) = x^3 + 2$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x-2}$

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$g(f(x)) = g(x^3+2) = \sqrt[3]{x^3+2-2} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

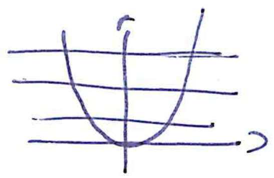
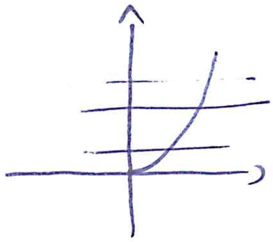
$\Rightarrow \quad f^{-1} = g \quad (\text{och } g^{-1} = f).$

Problem: Många viktiga funktioner är inte injektiva. För att invertera dessa styckar man upp D_f i delintervall där de är injektiva.

Ex. $f(x) = x^2$ är inte injektiv.

men $f_1(x) = x^2$, $D_{f_1} = [0, \infty)$ och $f_2(x) = x^2$, $D_{f_2} = (-\infty, 0]$ är injektiva. $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ och $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Anm. Horizontal linje test visar om f är injektiv: Om varje horizontal linje skär grafen med högst än punkt så är funktionen injektiv.

Ex.  ej-injektiv  injektiv.

Logaritmer Funktionen $f(x) = a^x$ är injektiv för alla $a \neq 1$. Så har den en invers som kallas logaritm funktion: bas a och betecknas $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Alltså
- $\log_a x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.
- $\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ och $a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in (0, \infty)$
- $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$.

Ex. $\log_2\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_2\left(2^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$

Ex. Bestäm D_f till $f(x) = \log_3(x-2)$.

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, \infty).$

Logaritmlagarna: $x, y > 0$.

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3) $\log_a(x^r) = r \log_a x$, $r \in \mathbb{R}$

Ex. $\log_2(80) - \log_2(5) = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$

Anm. $\log_a(1) = 0 \Rightarrow$ Grafen går genom $(1,0)$.

Def: Om $a = e \Rightarrow \log_e x$ betecknas $\ln x$ och kallas för naturliga logaritmen.

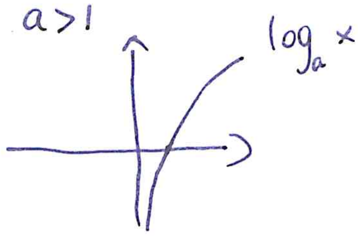
Basbyte: Alla logaritmer kan skrivas i termer av $\ln x$.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad a > 0 \text{ och } a \neq 1.$$

Ex. Lös ekvationen $e^{2x-1} = 3$.

$e^{2x-1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = \ln 3 \Rightarrow 2x = \ln 3 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\ln 3 + 1).$

Graf: $a > 1$



$0 < a < 1$