3.6 Derivator av logaritma funktioner.

Sats: 1) $f(x) = \ln x$ är inversen till $g(x) = e^x$.

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \qquad \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

2) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (Kedje regeln).

Ex. Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$.

Lösn. $$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)'}{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{\frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}}{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{3}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

3.8 Exponentiell tillväxt och sönderfall

En vanlig tillämpning av derivator är att lösa ODE (differentialekvationer). En ODE är en ekvation som involverar en funktion och sin derivata (t.ex. $f'(t) = kf(t)$, $k \in \mathbb{R}$).

Sats: Ekvationen $f'(t) = kf(t)$ har lösningen: $f(t) = f(0)e^{kt}$.

Bevis: $$f(t) = f(0)e^{kt} \Rightarrow f'(t) = f(0) \cdot ke^{kt} = k(\underbrace{f(0)e^{kt}}_{f(t)}) = kf(t).$$

Ex. Lös ODE:n $\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 3. \end{cases}$

Lösning: $y(t) = 3e^{2t}$.

Ekvationen $y'(t) = k\,y(t)$ är en vanligt beskrivning av verkliga processer: bakteriell tillväxt, radioaktivt sönderfall.

Om $k > 0$ pratar man om exponentiell tillväxt, om $k<0$ pratar man om exponentiell sönderfall eller avtagande.

Ex. Låt $T(t) =$ temperaturen hos ett objekt vid tiden t, och låt $T_s =$ omgivningens temperatur.

Newtons avsvalningslag: Förändringen av temperaturen hos objektet är proportionell mot temperaturdifferensen $T(t) - T_s$.

Dvs $T'(t) = k(T(t) - T_s)$.

Anta att $T(0) = T_0$. Bestäm $T(t)$.

Lösn.: $\begin{cases} T'(t) = k(T(t) - T_s) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$

Låt $f(t) = T(t) - T_s \Rightarrow f'(t) = T'(t)$ (T_s är konstant).

$\Rightarrow T'(t) = k(T(t) - T_s) \Leftrightarrow f'(t) = kf(t)$

och $f(0) = T(0) - T_s = T_0 - T_s$.

$\Rightarrow f(t) = f(0)e^{kt} \Rightarrow T(t) - T_s = (T_0 - T_s)e^{kt}$

$\Rightarrow T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{kt}$.

ex. En burk läsk som befunnits i rumstemperatur (22°C) stoppas in i ett kylskåp (7°C). Efter en halvtime är burkan 16°C. Hur varm kommer den att vara efter en timme?

Lösn $\left.\begin{array}{l} T'(t) = k(T(t) - 7) \\ T(0) = 22 \end{array}\right\} \Rightarrow T(t) = 7 + (22-7)e^{kt} = 15e^{kt} + 7.$

$T(t) = 15e^{kt} + 7.$

$T(0{,}5) = 16 \Rightarrow 15e^{0{,}5k} + 7 = 16 \Rightarrow 15e^{0{,}5k} = 9 \Rightarrow e^{0{,}5k} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow 0{,}5k = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow k = 2\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

Alltså $T(t) = 15\, e^{2t\ln\left(\frac{3}{5}\right)} + 7$

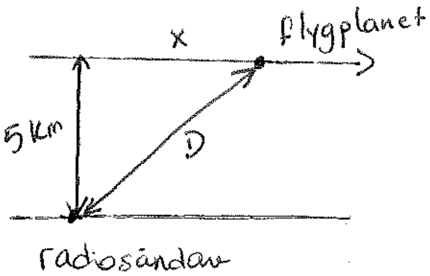
$\Rightarrow T(1) = 15\, e^{2\ln\left(\frac{3}{5}\right)} + 7 = 15\, e^{\ln\left(\frac{3}{5}\right)^2} + 7 = 15 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 7$

$= 15 \cdot \frac{9}{25} + 7 = \frac{27}{5} + 7 = 5{,}4 + 7 = 12{,}4\,^\circ C.$

3.9 Relaterade Hastighet

Några problem handlar om att flera storheter förändras med tiden.

Ex. Ett flygplan flygger horisontellt med hastigheten 600Km/h. Hur snabbt ökar avståndet mellan planet och en radiosändare 1 min efter det att planet har passerat över sändaren på höjden 5 Km?



Låt D vara avståndet mellan planet och radiosändaren.

$D^2 = x^2 + 25$ (x som i figuren till vänster)

D och x är funktioner av t, (D och x förändras med tiden) $\Rightarrow D^2(t) = x^2(t) + 25$.

Derivera HL och VL $\Rightarrow 2D(t)\, D'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) + 0$

$\Rightarrow D(t)\, D'(t) = x(t) \cdot x'(t) \quad \Rightarrow D'(t) = \dfrac{x(t)}{D(t)} \cdot x'(t)$.

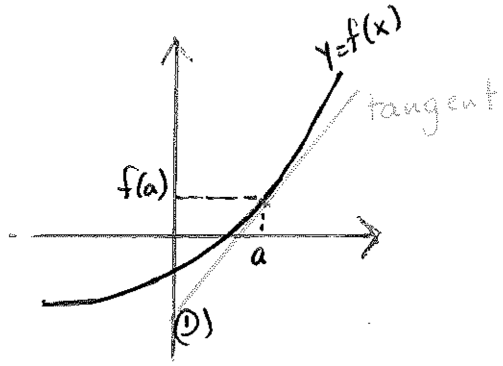
Vi behöver beräkna $x(t)$ och $D(t)$. $x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = 600$ km/h.

$t = 1$ min. $= \dfrac{1}{60}$ h. Alltså, $x\left(\frac{1}{60}\right) = \dfrac{1}{60} \cdot 600 = 10$ Km.

$D^2\left(\frac{1}{60}\right) = x^2 + 25 = 100 + 25 = 125 \Rightarrow D\left(\frac{1}{60}\right) = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ Km

$\Rightarrow D'(t) = \dfrac{10}{5\sqrt{5}} \cdot 600 = \dfrac{1200}{\sqrt{5}}$ Km/h.

3.10 Linjär approximation.



Låt $f(x)$ vara en funktion och (D) vara tangentlinjen till $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.

Ekvation av tangenten är

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

T.ex. om $f(x) = x^2$ och $a = 2 \Rightarrow f(a) = 4$, $f'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \text{tangent:} \quad y = 2\cdot 2(x-2)+4$$
$$= 4x - 8 + 4 = 4x - 4.$$

Om man vill beräkna $f(x)$ där x ligger nära 2 kan man approximera $f(x)$ med $f'(a)(x-a) + f(a)$.

$f(2+0{,}001) = 2{,}001^2 = 4{,}004001$ genom att använda $f(x)$

$$f(2+0{,}001) \simeq 4(\underbrace{2+0{,}001}_{x} - 2) + f(2)$$
$$= 4\cdot 0{,}001 + 4 = 4{,}004 \simeq f(2{,}001).$$

$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ kallas för linjärt approximation av f i $x = a$.

Ex. Beräkna $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}01\right)$ med linjärt approximation:

Låt $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ och låt $a = \frac{\pi}{3}$.

$$\Rightarrow L(x) = f'\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\tfrac{\pi}{3}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \sin\left(\tfrac{\pi}{3} - 0{,}01\right) \simeq L\left(\tfrac{\pi}{3} - 0{,}01\right) = \tfrac{1}{2}\left(\cancel{\tfrac{\pi}{3}} - 0{,}01 - \cancel{\tfrac{\pi}{3}}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= -0{,}005 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$