

Övning

I. Anta att förändringen av jordens befolkning är proportionell mot befolkningens storlek. Vi vet att jordens befolkning var 2560 miljoner 1950 och 3040 miljoner 1960. Under dessa antaganden hur stor bör befolkning vara år 2020?

Lösning Låt $B(t)$ = jordens befolkning (i miljoner) efter t år och $t=0$ är år 1950

$$\begin{cases} B'(t) = kB(t) \\ B(0) = 2560 \end{cases} \Rightarrow B(t) = 2560 e^{kt}$$

$$1960 \rightarrow t=10 \Rightarrow B(10) = 2560 e^{10k} = 3040$$

$$\Rightarrow e^{10k} = \frac{3040}{2560} \Rightarrow 10k = \ln\left(\frac{3040}{2560}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{3040}{2560}\right)$$

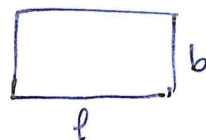
$$\Rightarrow B(t) = 2560 e^{\frac{t}{10} \ln\left(\frac{3040}{2560}\right)}$$

$$\text{År 2020} \Rightarrow t=70 \Rightarrow B(70) = 2560 e^{7 \ln\left(\frac{3040}{2560}\right)}$$

$$= 2560 e^{\ln\left(\frac{3040}{2560}\right)^7} = 2560 \left(\frac{3040}{2560}\right)^7 \approx 8526 \text{ miljoner}$$

II. Vid en viss tidpunkt är längden på en rektangel 16 cm och bredden 12 cm. Bredden ökar med 3 cm/s. Hur snabbt ändras längden om arean av rektangeln förblir konstant?

Lösning: Arean = $l(t) \cdot b(t) = C$ (konstant)



Derivera: $l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t) = 0$
(produkt regel).

$$\Rightarrow l'(t) = -\frac{l(t) b'(t)}{b(t)}$$

för $t = t_0$, $l(t_0) = 16$, $b(t_0) = 12$ och $b'(t_0) = 3$

$$\Rightarrow l'(t_0) = -\frac{16 \cdot 3}{12} = -4 \text{ cm/s.}$$

$\Rightarrow$ Längden minskar med hastigheten 4 cm/s.

III. Beräkna med linjär approximation $\sqrt{4,005}$.

Lösning. Låt $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$

$$L(x) = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$$

$$f(4,005) \approx L(4,005) = \frac{1}{4}(4,005 - 4) + 2 = \frac{1}{4}(0,005) + 2 = 0,00125 + 2 = 2,00125.$$

IV Antag att $f'(\frac{\pi}{6}) = 2$, beräkna derivatan till

$f(\sin^{-1} x)$ då $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Lösning. } \frac{d}{dx} f(\sin^{-1} x) \Big|_{x=\frac{1}{2}} &= f'(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = f'(\sin^{-1} \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \\ &= f'(\frac{\pi}{6}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3/4}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$